WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 20./21. Mai 2003

a) Berechnen Sie die folgenden Summen in $\mathbb{F}_2^3$:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{u}$$

b) Bestimmen Sie Kern und Bild der linearen Abbildung $\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{F}_2^4 \to \mathbb{F}_2^2 \\ \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}a+b\\c+d\end{pmatrix} \end{cases}$!

c) Richtig oder falsch: Die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ aus $\mathbb{F}_2^3$ sind linear unabhängig.

d) Richtig oder falsch: Die Vektoren $\begin{pmatrix}\alpha\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}\alpha+1\\\alpha\end{pmatrix}$ aus $\mathbb{F}_4^2$ sind linear unabhängig.

e) Richtig oder falsch: Die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{F}_4 \to \mathbb{F}_4$, die α und $\alpha+1$ miteinander vertauscht und $0, 1$ auf sich selbst abbildet, ist $\mathbb{F}_2$-linear.

f) Richtig oder falsch: Für ein Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_2$ ist

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdot + a_nx^n)^2 = a_0 + a_1x^2 + a_2x^4 + \cdot + a_nx^{2n}.$$

g) Was ist $(x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 + 1)$, wenn man mit Koeffizienten aus $\mathbb{F}_2$ rechnet?

h) Zeigen Sie: Das Polynom $x^4 + 1$ ist reduzibel über $\mathbb{F}_2$.

i) Stellen Sie den ggT von 2010 und 123 als Linearkombination dieser Zahlen dar!

j) Bestimmen Sie im Körper $\mathbb{F}_{1031}$ die multiplikativen Inversen von zwei, zehn und zwanzig!

k) Berechnen Sie den ggT der beiden Polynome $x^4 + 1$ und $x^3 + 1$ sowohl über $\mathbb{R}$ als auch über $\mathbb{F}_2$!

l) Berechnen Sie über $\mathbb{F}_2$ den ggT der beiden Polynome $f = x^4 + x^2 + 1$ und $g = x^3 + 1$, und stellen Sie ihn in der Form $\alpha f + \beta g$ dar!

Multiplikation in $\mathbb{F}_8 = \mathbb{F}_2^3$ mit Basis $1, \alpha, \alpha^2$ sei über die Relation $\alpha^3 = \alpha + 1$ definiert.

m) Was ist $(\alpha^2 + 1)(\alpha + 1)$?

n) Was ist $(\alpha^2 + 1)^2$?

o) Was ist $\dfrac{1}{\alpha}$?

Multiplikation in $\mathbb{F}_{64} = \mathbb{F}_2^6$ mit Basis $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^6$ sei über die Relation $\alpha^6 = \alpha + 1$ definiert.

p) Was ist $(\alpha^2 + 1)^3$?

q) Was ist $(\alpha^3 + 1)^3$?

r) Was ist $\dfrac{1}{\alpha + 1}$?