WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, ZIMMER C201

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 13./14. Mai 2003

a) Bestimmen Sie die Erzeugnisse $[M_i]$ der folgenden Mengen M_i:

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0\\1\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\1\\0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3, \qquad M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 3\\1\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9\\3\\6 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3,$$

$$M_3 = \{\sin t, \cos t, 2\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \qquad M_4 = \{\sin^2 t, \cos^2 t, 2\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

In welchen Fällen läßt sich $[M_i]$ bereits durch eine kleinere Menge erzeugen?

Lösung:

$$[M_1] = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 0\\1\\2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2\\1\\0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda,\mu \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2\mu\\ \lambda+\mu\\ 2\lambda \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda,\mu \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x+z=2y \right\}$$

Offensichtlich besteht dieser Untervektorraum nicht einfach aus den sämtlichen Vielfachen eines einzigen Vektors; daher läßt sich $[M_1]$ nicht durch eine kleinere Menge erzeugen.

Im Falle von M_2 dagegen ist $\begin{pmatrix} 9\\3\\6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 3\\1\\2 \end{pmatrix}$; wegen

$$\lambda \begin{pmatrix} 3\\1\\2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 9\\3\\6 \end{pmatrix} = (\lambda+3\mu) \begin{pmatrix} 3\\1\\2 \end{pmatrix} = \left(\frac{\lambda}{3}+\mu\right) \begin{pmatrix} 9\\3\\6 \end{pmatrix}$$

ist daher jede Linearkombination der beiden Vektoren bereits als Vielfaches wahlweise des ersten oder des zweiten Vektors darstellbar. Somit ist, wenn wir den ersten Vektor nehmen,

$$[M_2] = \left\{ \begin{pmatrix} 3\lambda\\ \lambda\\ 2\lambda \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x = 3y \text{ und } z = 2y \right\}.$$

Von den drei Funktionen aus M_3 ist keine überflüssig: Sinus und Cosinus gehen auseinander hervor durch eine Phasenverschiebung; dies kann offensichtlich nicht durch Linearkombination mit einer Konstanten erreicht werden. (Wer lieber einen formaleren Beweis sieht, mache beispielsweise den Ansatz $\cos t = \lambda \sin t + 2\mu$; für $t = 0$ und $t = \pi$ folgt dann $1 = 2\mu$ und $-1 = 2\mu$, was offensichtlich nicht beides gelten kann; entsprechend mit $t = \pm\pi/2$ für eine Linearkombination des Sinus aus Cosinus und einer Konstanten.)

Wäre $2 = \lambda \sin t + \mu \cos t$ für alle t, müßte insbesondere für $t = 0$ gelten, daß $2 = \mu$ wäre; entsprechend wäre auch $2 = -\mu$ für $t = \pi$. Auch das ist nicht beides gleichzeitig möglich. Damit ist

$$[M_3] = \left\{ \lambda \sin t + \mu \cos t + \nu \,\middle|\, \lambda,\mu,\nu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Im Fall von M_4 folgt aus der wohlbekannten Beziehung $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, daß

$$2 = 2\sin^2 + 2\cos^2 t, \quad \sin^2 t = \frac{1}{2}\cdot 2 - \cos^2 t \quad \text{und} \quad \cos^2 t = \frac{1}{2}\cdot 2 - \sin^2 t$$

ist; jedes der drei Elemente aus M_4 kann daher als Linearkombination der beiden anderen geschrieben werden. Somit genügen zur Erzeugung von $[M_4]$ irgendwelche zwei Funktionen aus M_4. Da Konstanten für die meisten Zwecke die einfachsten Funktionen sind und es im übrigen für das Erzeugung einer Menge völlig irrelevant ist, welche nichtverschwindende Konstante darin vorkommt, ist eine mögliche ökonomische Darstellung von $[M_4]$ etwa

$$[M_4] = \left\{\lambda + \mu \sin^2 t \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}.$$

NB: Bei M_1 haben wir zwei wesentlich verschiedene Lösungen; welche ist die beste? Falls man $[M_1]$ möglichst einfach im Computer darstellen will, keine der beiden: Dann ist es am einfachsten, die Aufgabe völlig zu ignorieren und $[M_1]$ durch die angegebenen beiden Erzeugenden zu repräsentieren. Falls man allerdings $[M_1]$ als dreidimensionale Menge graphisch auf dem Bildschirm darstellen möchte, ist zumindest beim (etwas altertümlichen) Drahtgittermodell die parametrische Darstellung am geeignetsten. Für photorealistische Darstellungen dagegen hat je nach Anwendung die Darstellung durch Gleichungen oftmals Vorteiel gegenüber der parametrischen Darstellung. Es gibt also, genau wie bei den anderen drei Beispielen, keine für alle Zwecke optimale Darstellung; vielmehr geht es hier darum, die verschiedenen möglichen Darstellungen einer Menge ineinander umzurechnen; je nach Anwendung kann jede davon genau das sein, wonach ein gegebenes Problem verlangt.

b) Welche der folgenden Mengen sind linear unabhängig?

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3, \qquad M_2 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3,$$

$$M_3 = \left\{\sin t, t, t^2\right\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), \qquad M_4 = \left\{e^t, e^{2t}, e^{3t}\right\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),$$

$$M_5 = \left\{e^t, e^{t+1}, e^{t+2}\right\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), \qquad M_6 = \left\{e^t, \sinh t, \cosh t\right\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

Lösung: Im Falle von M_1 steigt der Eintrag bei jedem der drei Vektoren von Komponente zu Komponente jeweils um eins, daher ist

$$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Das erste Gleichheitszeichen führt zur nichttrivialen Darstellung des Nullvektors

$$2\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} = \vec{0},$$

die drei Vektoren sind also linear abhängig.

Im Fall von M_2 führt die Gleichung

$$\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda+\mu+\nu\\2\mu+2\nu\\3\nu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

(rückwärts) auf das lineare Gleichungssystem

$$3\nu = 0, \quad 2\mu + 2\nu = 0, \quad \lambda + \mu + \nu = 0,$$

das offensichtlich nur die triviale Lösung $\lambda = \mu = \nu = 0$ hat; M_2 ist also linear unabhängig.

Da der Sinus kein Polynom ist, vermutet man, daß M_3 linear unabhängig ist, d.h. aus

$$\lambda \sin t + \mu t + \nu t^2 = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

sollte folgen, daß $\lambda = \mu = \nu = 0$ ist. Einsetzen von $t = \pi$ zeigt, daß für so eine Darstellung $\mu\pi + \nu\pi^2 = 0$ sein müßte, also $\mu = -\pi\nu$. Für $t = -\pi$ dagegen folgt $-\mu\pi + \nu\pi^2 = 0$ also $\mu = \nu\pi$, und das kann nur für $\mu = \nu = 0$ beides gelten. Da der Sinus nicht identisch verschwindet, muß dann auch $\lambda = 0$ sein, die drei Funktionen sind also linear unabhängig.

Falls für Elemente $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ und alle $t \in \mathbb{R}$

$$\lambda e^t + \mu e^{2t} + \nu e^{3t} \equiv 0$$

gilt, hat das kubische Polynom $\lambda X + \mu X^2 + \nu X^3$ unendlich viele Nullstellen, muß also das Nullpolynom sein. Daher ist auch M_4 linear unabhängig.

Nach der Fundamentalgleichung der Exponentialgleichung ist $e^{x+1} = ee^x$; daher zeigt bereits die Gleichung

$$e^{x+1} - ee^x \equiv 0$$

die lineare Abhängigkeit von M_5.

Die Definitionen $\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ und $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ zeigen, daß

$$\sinh t + \cosh t = e^t, \quad \text{d.h.} \quad \sinh t + \cosh t - e^t \equiv 0\,.$$

Somit ist auch M_6 linear abhängig.

c) *Richtig oder falsch:* Ist M ein Erzeugendensystem des Vektorraums V und $N \subset V$ eine Teilmenge für die $M \subset [N]$ ist, so ist auch N ein Erzeugendensystem von V.

Lösung: *Richtig,* denn jedes Element $\vec{v} \in V$ läßt sich als Linearkombination endlich vieler Elemente von $\vec{m}_i \in M$ darstellen, etwa als

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{m}_1 + \cdots + \lambda_r \vec{m}_r\,.$$

Die $\vec{m}_i$ wiederum liegen in $[N]$, lassen sich also als Linearkombinationen von Vektoren $\vec{n}_j$ schreiben. Da wir nur endlich viele $\vec{m}_i$ betrachten, können wir selbst im Falle einer unendlichen Menge N endlich viele $\vec{n}_j$ finden, so daß $\vec{m}_1$ bis $\vec{m}_r$ Linearkombinationen dieser Vektoren sind, etwa

$$\vec{m}_i = \mu_{i1}\vec{n}_1 + \cdots + \mu_{is}\vec{n}_s \quad \text{für } i = 1, \ldots, r\,.$$

Dann ist

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \vec{m}_i = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{s} \mu_{ij}\vec{n}_j \right) = \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mu_{ij} \right) \vec{n}_j$$

eine Darstellung von $\vec{v}$ als Linearkombination von Elementen aus N. Da $\vec{v} \in V$ beliebig war, folgt $[N] = V$.

d) *Richtig oder falsch:* Ist M ein Erzeugendensystem von V und $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung, so ist

$$\varphi(M) = \left\{ \varphi(\vec{v}) \,\middle|\, \vec{v} \in M \right\}$$

ein Erzeugendensystem von Bild φ.

Lösung: *Richtig,* denn zu jedem Vektor $\vec{w} \in \operatorname{Bild}\varphi$ gibt es ein Urbild $\vec{v} \in V$, das sich nach Voraussetzung als Linearkombination

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \cdots + \lambda_r \vec{b}_r$$

von Elementen aus M schreiben läßt. Dann ist aber

$$\vec{w} = \varphi(\vec{v}) = \varphi\big(\lambda_1 \vec{b}_1 + \cdots + \lambda_r \vec{b}_r\big) = \lambda_1 \varphi(\vec{b}_1) + \cdots + \lambda_r \varphi(\vec{b}_r)$$

Linearkombination von Elementen aus $\varphi(M)$.

e) V sei der von $\{\sin t, \cos t, \sin^2 t, \cos^2 t, \sin t \cos t\}$ erzeugte Untervektorraum von $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, und ψ sei die lineare Abbildung $V \to \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, die jedes $f \in V$ auf seine Ableitung nach t abbildet. Finden Sie möglichst kleine Erzeugendensysteme für Kern und Bild von ψ!

Lösung: Wir müssen zunächst die Bilder der Erzeugenden berechnen:

$$\psi(\sin t) = \cos t, \quad \psi(\cos t) = -\sin t,$$
$$\psi(\sin^2 t) = 2\sin t \cos t, \quad \psi(\cos^2 t) = -2\sin t \cos t, \quad \psi(\sin t \cos t) = \cos^2 t - \sin^2 t\,.$$

Das Bild wird also erzeugt von den Funktionen

$$\sin t, \quad \cos t, \quad \sin t \cos t \quad \text{und} \quad \cos^2 t - \sin^2 t\,.$$

Die einzigen Funktionen, deren Ableitung die Nullfunktion ist, sind die Konstanten; da $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ ist, liegen diese in V; der Kern wird also z.B. von der konstanten Funktion 1 erzeugt.

f) Welche Dimension hat der Vektorraum aller reeller Polynome vom Grad höchstens n?

Lösung: Offensichtlich bilden die Polynome $1, X, X^2, \ldots, X^n$ eine Basis; die Dimension ist also $n+1$.

g) Welche Dimension hat der Untervektorraum $W = \{a \sin^2 t + b \cos^2 t + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Lösung: Wie im Themenvorschlag *a)* bei der Menge M_4 sieht man sofort, daß eine der drei erzeugenden Funktionen überflüssig ist; eine Basis von W besteht beispielsweise aus $\sin^2 t$ und 1. Damit ist $\dim W = 2$.

h) Ergänzen Sie die Menge $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^2$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^2$!

Lösung: Da je zwei linear unabhängige Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ eine Basis bilden, genügt es, irgendeinen von $\binom{1}{1}$ linear unabhängigen Vektor dazuzunehmen, z.B. $\binom{1}{0}$ oder $\binom{1}{-1}$.

i) Richtig oder falsch: Sind U_1, U_2 Untervektorräume eines Vektorraums V, so gibt es Basen $\mathcal{B}_1$ von U_1 und $\mathcal{B}_2$ von U_2, so daß $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ eine Basis von $U_1 \cap U_2$ ist.

Lösung: *Richtig:* Man wähle eine Basis $\mathcal{B}_0$ von $U_1 \cap U_2$ und ergänze diese zu einer Basis $\mathcal{B}_1$ von U_1 und zu einer Basis $\mathcal{B}_2$ von U_2.

j) Richtig oder falsch: $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\7\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\11\\0\end{pmatrix}\right\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

Lösung: Da $\mathcal{B}$ aus drei Vektoren besteht, ist $\mathcal{B}$ genau dann eine Basis von $\mathbb{R}^3$, wenn diese Vektoren linear unabhängig sind. Ist

$$\lambda \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}5\\7\\0\end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix}0\\11\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\lambda + 5\mu\\7\mu + 11\nu\\3\lambda\end{pmatrix}$$

der Nullvektor, so zeigt der dritte Eintrag, daß $\lambda = 0$ sein muß. Dann aber muß wegen der ersten Zeile auch μ verschwinden, und dann wiederum zeigt die dritte Zeile, daß auch $\nu = 0$ ist. Also sind die Vektoren linear unabhängig und bilden somit eine Basis.
(Alternativ hätte man auch zeigen können, daß $[\mathcal{B}] = \mathbb{R}^3$ ist, was fast genauso geht.)

k) Richtig oder falsch: Die Polynome $x^2, x^2 + x$ und $x^2 + x + 1$ bilden eine Basis des Vektorraums aller reeller Polynome vom Grad höchstens zwei.

Lösung: Da der Vektorraum aller Polynome vom Grand höchstens zwei dreidimensional ist (*vgl. f)*), reicht es wieder, entweder zu zeigen, daß die drei Polynome linear unabhängig sind oder aber zu zeigen, daß sie ein Erzeugendensystem des Vektorraums bilden. Da ich bei der vorigen Frage über die lineare Unabhängigkeit argumentiert habe, zeige ich hier – auch wenn es geringfügig aufwendiger ist – letzteres.
Sei also $ax^2 + bx + c$ ein Polynom vom Grad höchstens zwei. Gesucht sind reelle Zahlen λ, μ, ν, so daß

$$\lambda x^2 + \mu(x^2 + x) + \nu(x^2 + x + 1) = (\lambda + \mu + \nu)x^2 + (\mu + \nu)x + \nu = ax^2 + bx + c$$

ist. Koeffizientenvergleich zeigt, daß dies gilt für

$$\nu = c, \quad \mu = b - c \quad \text{und} \quad \lambda = a - (b - c) - c = a - b - 2c\,.$$

Kürzer geht es, wenn man beachtet, daß es nach *c)* ausreicht, die lineare Kombinierbarkeit der Elemente der „üblichen" Basis $\{1, x, x^2\}$ zu zeigen:

$$1 = (x^2 + x + 1) - (x^2 + x), \quad x = (x^2 + x) - x^2, \quad x^2 = x^2\,.$$

l) Finden Sie eine Basis des Vektorraums $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;\middle|\; b = c \right\}$!

Lösung: Jede Matrix aus V hat die Form $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ und läßt sich daher eindeutig schreiben als Linearkombination

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

Somit bilden die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ eine Basis: Sie bilden ein Erzeugendensystem, und wegen der Eindeutigkeit der Darstellung hat die Nullmatrix nur die triviale Darstellung.

m) Welche Dimension haben Kern und Bild der linearen Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2; \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y - z \\ y + z - w \end{pmatrix} \;?$$

Lösung: Die Abbildung ist offensichtlich surjektiv, denn

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ -w \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}\,.$$

Also ist das Bild zweidimensional; wenn die Dimensionsformel bis zur Übung bereits bekannt ist, folgt damit, daß auch der Kern zweidimensional ist:

$$\dim \mathrm{Bild}\,\varphi = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \mathrm{Kern}\,\varphi = 4 - \dim \mathrm{Kern}\,\varphi\,.$$

Andernfalls müssen wir rechnen: Für einen Vektor aus dem Kern ist

$$x + y - z = 0 \quad \text{und} \quad y + z - w = 0, \quad \text{also} \quad z = x + y \quad \text{und} \quad w = y + z = x + 2y\,.$$

Im Kern liegen daher genau die Vektoren der Form

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \lambda + \mu \\ \lambda + 2\mu \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\,.$$

Damit haben wir eine Basis des Kerns gefunden und sehen insbesondere, daß er zweidimensional ist.