Wolfgang K. Seiler
*Tel.* 2515
A5, Zimmer C201

# Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 13./14. Mai 2003

*a)* Bestimmen Sie die Erzeugnisse $[M_i]$ der folgenden Mengen $M_i$:

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0\\1\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\1\\0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3, \qquad M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 3\\1\\2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9\\3\\6 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3,$$

$$M_3 = \{\sin t, \cos t, 2\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \qquad M_4 = \{\sin^2 t, \cos^2 t, 2\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

In welchen Fällen läßt sich $[M_i]$ bereits durch eine kleinere Menge erzeugen?

*b)* Welche der folgenden Mengen sind linear unabhängig?

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1\\2\\3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\3\\4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3\\4\\5 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3, \quad M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\2\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\2\\3 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3,$$

$$M_3 = \left\{\sin t, t, t^2\right\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), \qquad M_4 = \left\{e^t, e^{2t}, e^{3t}\right\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),$$

$$M_5 = \left\{e^t, e^{t+1}, e^{t+2}\right\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), \qquad M_6 = \left\{e^t, \sinh t, \cosh t\right\} \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

*c)* *Richtig oder falsch:* Ist $M$ ein Erzeugendensystem des Vektorraums $V$ und $N \subset V$ eine Teilmenge für die $M \subset [N]$ ist, so ist auch $N$ ein Erzeugendensystem von $V$.

*d)* *Richtig oder falsch:* Ist $M$ ein Erzeugendensystem von $V$ und $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung, so ist

$$\varphi(M) = \left\{ \varphi(\vec{v}) \;\middle|\; \vec{v} \in M \right\}$$

ein Erzeugendensystem von Bild $\varphi$.

*e)* $V$ sei der von $\{\sin t, \cos t, \sin^2 t, \cos^2 t, \sin t \cos t\}$ erzeugte Untervektorraum von $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, und $\psi$ sei die lineare Abbildung $V \to \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, die jedes $f \in V$ auf seine Ableitung nach $t$ abbildet. Finden Sie möglichst kleine Erzeugendensysteme für Kern und Bild von $\psi$!

*f)* Welche Dimension hat der Vektorraum aller reeller Polynome vom Grad höchstens $n$?

*g)* Welche Dimension hat der Untervektorraum $W = \left\{ a\sin^2 t + b\cos^2 t + c \;\middle|\; a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$ von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

*h)* Ergänzen Sie die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} 1\\1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^2$!

*i)* *Richtig oder falsch:* Sind $U_1, U_2$ Untervektorräume eines Vektorraums $V$, so gibt es Basen $\mathcal{B}_1$ von $U_1$ und $\mathcal{B}_2$ von $U_2$, so daß $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ eine Basis von $U_1 \cap U_2$ ist.

*j)* *Richtig oder falsch:* $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2\\0\\3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5\\7\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\11\\0 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

*k)* *Richtig oder falsch:* Die Polynome $x^2, x^2 + x$ und $x^2 + x + 1$ bilden eine Basis des Vektorraums aller reeller Polynome vom Grad höchstens zwei.

*l)* Finden Sie eine Basis des Vektorraums $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b\\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;\middle|\; b = c \right\}$!

*m)* Welche Dimension haben Kern und Bild der linearen Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2; \qquad \begin{pmatrix} x\\y\\z\\w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y-z\\ y+z-w \end{pmatrix} ?$$