WOLFGANG K. SEILER A5, ZIMMER C201
Tel. 2515

Themenvorschläge für die kleinen Übungen am 6./7. Mai 2003

a) Welche der folgenden Mengen sind, mit der üblichen Addition und Multiplikation komplexer Zahlen, Körper?

$$k_1 = \mathbb{N}_0, \quad k_2 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad k_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}, \quad k_4 = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0 \text{ für alle } x\},$$
$$k_5 = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}, \quad k_6 = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}, \quad k_7 = \{a + b\sqrt[3]{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

Lösung: k_1 ist kein Körper, da beispielsweise das Element zwei weder ein additives noch ein multiplikatives Inverses hat. k_2 ist schon deshalb keiner, weil die Null und die Eins beide rational sind; in k_3 gibt es keine additiven Inversen.

Aus demselben Grund ist auch k_4 kein Körper: Beispielsweise haben $f(x) = 2 + x^2$ und $g(x) = -1 - 2x^2$ beide keine reelle Nullstelle, liegen also in k_4, aber $(f + g)(x) = 1 - x^2$ verschwindet bei $x = \pm 1$. Außerdem enthält k_4 nicht einmal ein Neutralelement bezüglich der Addition, da die Nullfunktion natürlich überall verschwindet.

k_5 ist ein Körper, denn $(a + bi) \pm (c + di) = (a + c) + (b + d)i$ und $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$ liegen wieder in k_5, genau wie für $(a, b) \neq (0, 0)$ auch

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{bi}{a^2 + b^2}.$$

Aus demselben Grund ist auch k_6 ein Körper: $(a+b\sqrt{2}) \pm (c+d\sqrt{2}) = (a+c)+(b+d)\sqrt{2}$ und $(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}$ liegen wieder in k_6, genau wie für $(a, b) \neq (0, 0)$ auch

$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2})} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2},$$

denn wegen der Irrationalität von $\sqrt{2}$ kann der Nenner dann nicht verschwinden.

k_7 schließlich ist kein Körper, denn beispielsweise liegt $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3}$ nicht in k_7. (Das ist allerdings schon im wesentlichen die einzige Ausnahme: $k_8 = \left\{a + b\sqrt[3]{3} + c\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{Q}\right\}$ ist ein Körper!)

b) Welche der folgenden Mengen sind $\mathbb{R}$-Vektorräume?

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}, \qquad V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x+1 \\ x+2 \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\},$$
$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}, \qquad V_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; xy = 0 \right\},$$
$$V_5 = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'(2) = 0 \right\}, \qquad V_6 = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'(2) = 2 \right\}$$

Lösung: V_1 ist eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}^3$, und für zwei reelle Zahlen λ, μ ist

$$\lambda \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ y \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} u \\ u+v \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + \mu u \\ \lambda(x+y) + \mu(u+v) \\ \lambda y + \mu v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + \mu u \\ (\lambda x + \mu u) + (\lambda y + \mu v) \\ \lambda y + \mu v \end{pmatrix} \in V_1,$$

V_1 ist also Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ und damit insbesondere selbst ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

V_2 und V_3 sind keine Vektorräume; beispielsweise enthalten beide keinen Nullvektor. (Es gibt auch sonst noch viele Eigenschaften, die nicht erfüllt sind.)

Auch V_4 ist *kein* Vektorraum: Beispielsweise liegen $\binom{1}{0}$ und $\binom{0}{1}$ beide in V_4, nicht aber ihre Summe $\binom{1}{1}$.

V_5 ist Teilmenge des Vektorraums $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und für $f, g \in V_5$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ liegt auch $\lambda f + \mu g$ in V_5, denn $(\lambda f + \mu g)'(2) = \lambda f'(2) + \mu g'(2) = 0 + 0 = 0$. Genauso sieht man, daß V_6 *kein* Vektorraum ist: Für $f, g \in V_6$ ist $(f + g)'(2) = f'(2) + g'(2) = 2 + 2 = 4$, d.h. $f + g \notin V_6$.

c) *Richtig oder falsch:* Sind $\varphi, \psi\colon V \to W$ zwei lineare Abbildungen, so sind auch die Abbildungen $\varphi \pm \psi\colon V \to W$ mit $(\varphi \pm \psi)(\vec{v}) = \varphi(\vec{v}) \pm \psi(\vec{v})$ linear.

Lösung: *Richtig,* denn für λ, μ aus dem Grundkörper k und $\vec{v}, \vec{w} \in V$ ist

$$\begin{aligned}
(\varphi \pm \psi)(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) &= \varphi(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) \pm \psi(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) \\
&= \big(\lambda\varphi(\vec{v}) + \mu\varphi(\vec{w})\big) \pm \big(\lambda\psi(\vec{v}) + \mu\psi(\vec{w})\big) \\
&= \big(\lambda\varphi(\vec{v}) \pm \lambda\psi(\vec{v})\big) + \big(\mu\varphi(\vec{w}) \pm \mu\psi(\vec{w})\big) \\
&= \lambda\big(\varphi(\vec{v}) \pm \psi(\vec{v})\big) + \mu\big(\varphi(\vec{w}) \pm \psi(\vec{w})\big) \\
&= \lambda(\varphi \pm \psi)(\vec{v}) + \mu(\varphi \pm \psi)(\vec{w})\,.
\end{aligned}$$

d) *Richtig oder falsch:* Die Menge H aller linearer Abbildungen $\varphi\colon V \to W$ zwischen zwei festen k-Vektorräumen V und W ist selbst ein k-Vektorraum.

Lösung: *Richtig:* Wir wissen bereits von der letzten Frage, daß für $\varphi, \psi \in H$ auch deren Summe dort liegt. Genauso zeigt man, daß für $\gamma \in k$ auch $\gamma\varphi$ in H liegt, denn für $\lambda, \mu \in k$ und $\vec{v}, \vec{w} \in V$ ist

$$\begin{aligned}
(\gamma\varphi)(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) &= \gamma \cdot \varphi(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \gamma \cdot \big(\lambda\varphi(\vec{v}) + \mu\varphi(\vec{w})\big) = \gamma \cdot \lambda\varphi(\vec{v}) + \gamma \cdot \mu\varphi(\vec{w}) \\
&= \lambda \cdot \gamma \cdot \varphi(\vec{v}) + \mu \cdot \gamma \cdot \varphi(\vec{w}) = \lambda \cdot (\gamma\varphi)(\vec{v}) + \mu \cdot (\gamma\varphi)(\vec{w})\,.
\end{aligned}$$

Null„vektor“ in H ist die Nullabbildung, und $-\varphi$ ist gerade $(-1)\cdot\varphi$, d.h. $(-\varphi)(\vec{v}) = -\varphi(\vec{v})$ für alle $\vec{\in} V$.

e) Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y \\ y + 2z \\ z + 2 \end{pmatrix}, \qquad \psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 2x + 3y + 4z \\ 3x + 4y + 5z \end{pmatrix},$$

$$\omega\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y + z \\ xy + yz + xz \\ xyz \end{pmatrix}$$

Lösung: φ ist offensichtlich nicht linear, beispielsweise, weil der Nullvektor nicht auf den Nullvektor abgebildet wird, sondern auf einen Vektor mit dritter Komponente zwei.

ψ ist linear, denn für $\lambda, \mu \in k$ und $x, y, z, u, v, w \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned}
\psi\left(\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}\right) &= \psi\left(\begin{pmatrix} \lambda x + \mu u \\ \lambda y + \mu v \\ \lambda z + \mu w \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} (\lambda x + \mu u) + 2(\lambda y + \mu v) + 3(\lambda z + \mu w) \\ 2(\lambda x + \mu u) + 3(\lambda y + \mu v) + 4(\lambda z + \mu w) \\ 3(\lambda x + \mu u) + 4(\lambda y + \mu v) + 5(\lambda z + \mu w) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

und das ist dasselbe wie

$$\lambda\psi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) + \mu\psi\left(\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}\right) = \lambda\begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 2x + 3y + 4z \\ 3x + 4y + 5z \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} u + 2v + 3w \\ 2u + 3v + 4w \\ 3u + 4v + 5w \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda(x + 2y + 3z) + \mu(u + 2v + 3w) \\ \lambda(2x + 3y + 4z) + \mu(2u + 3v + 4w) \\ \lambda(3x + 4y + 5z) + \mu(3u + 4v + 5w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda x + \mu u) + 2(\lambda y + \mu v) + 3(\lambda z + \mu w) \\ 2(\lambda x + \mu u) + 3(\lambda y + \mu v) + 4(\lambda z + \mu w) \\ 3(\lambda x + \mu u) + 4(\lambda y + \mu v) + 5(\lambda z + \mu w) \end{pmatrix}.$$

ω ist nicht linear, denn beispielsweise ist

$$\omega\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)=\omega\left(\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}6\\12\\8\end{pmatrix},$$

aber

$$\omega\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)+\omega\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\6\\2\end{pmatrix}.$$

f) Bestimmen Sie im linearen Fall Kern und Bild der Abbildung!

Lösung: Da nur ψ linear ist, können wir uns darauf beschränken.
Der Vektor mit Komponenten x, y, z liegt genau dann im Kern, wenn

$$x+2y+3z=0,\quad 2x+3y+4z=0 \quad\text{und}\quad 3x+4y+5z=0$$

ist. Wir werden bald allgemeine Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme kennenlernen; in diesem einfachen Fall führt aber jedes in der Schule behandelte elementare Verfahren leicht zu einer Lösung.

Beispielsweise sieht man sofort, daß die Differenz zwischen zweiter und erster wie auch zwischen dritter und zweiter Gleichung jeweils die Gleichung $x+y+z=0$ ist; subtrahiert man diese von der ersten Gleichung, ergibt sich $y+2z=0$ oder $y=-2z$. Einsetzen in die Gleichung $x+y+z=0$ zeigt dann, daß $x-2z+z=0$ oder $x=z$ sein muß. Für jede Lösung ist also $x=z$ und $y=-2z$; setzt man irgendein Tripel mit $x=z$ und $y=-2z$ in die drei ursprünglichen Gleichungen ein, sieht man, daß dieses auch umgekehrt stets eine Lösung ist. Also ist

$$\operatorname{Kern}\psi=\left\{\begin{pmatrix}z\\-2z\\z\end{pmatrix}\;\middle|\; z\in\mathbb{R}\right\}.$$

Zur Bestimmung des Bilds kann man ebenfalls ausnutzen, daß die Differenz zwischen dritter und zweiter sowie zweiter und erster Komponente eines Vektors aus dem Bild gleich ist, d.h.

$$\operatorname{Bild}\psi\subseteq\left\{\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}\;\middle|\; w-v=v-u\right\}=\left\{\begin{pmatrix}u\\v\\2v-u\end{pmatrix}\;\middle|\; u,v\in\mathbb{R}\right\}.$$

Wenn man beispielsweise nach einem Urbild mit dritter Komponente null sucht, sieht man schnell, daß

$$\psi\left(\begin{pmatrix}2v-3u\\2u-v\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}(2v-3u)+2(2u-v)\\2(2v-3u)+3(2u-v)\\3(2v-3u)+4(2u-v)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\\v\\2v-u\end{pmatrix}$$

ist, das Bild ist also sogar *gleich* der rechtsstehenden Menge. (Wir werden bald Verfahren kennenlernen, mit denen man solche Probleme systematischer lösen kann.)

g) Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume von $V=\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

$U_1=\{f\in V \mid f(t)=f(-t) \text{ für alle } t\in\mathbb{R}\}$, $U_2=\{f\in V \mid f(t)=-f(-t) \text{ für alle } t\in\mathbb{R}\}$,
$U_3=\{f\in V \mid f(t)=f(t^2) \text{ für alle } t\in\mathbb{R}\}$, $U_4=\{f\in V \mid f(t)=f(t+1) \text{ für alle } t\in\mathbb{R}\}$

Lösung: Seien $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ und f,g Elemente einer der vier betrachteten Mengen U_i. Da alle U_i zumindest die Nullfunktion enthalten, müssen wir nur prüfen, ob dann auch $\lambda f+\mu g$ in U_i liegt. Nach Definition der Vektorraumstruktion von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ist

$$(\lambda f+\mu g)(t)=\lambda f(t)+\mu g(t)\quad\text{für alle } t\in\mathbb{R}.$$

Entsprechend ist für $f,g\in U_1$

$$(\lambda f+\mu g)(-t)=\lambda f(-t)+\mu g(-t)=\lambda f(t)+\mu g(t)=(\lambda f+\mu g)(t),$$

d.h. U_1 ist Untervektorraum. Genauso auch U_2, denn

$$\begin{aligned}-(\lambda f+\mu g)(-t) &= -\lambda f(-t)-\mu g(-t) = \lambda\cdot\big(-f(-t)\big)+\mu\cdot\big(-g(-t)\big)\\ &= \lambda f(t)+\mu g(t) = (\lambda f+\mu g)(t)\,.\end{aligned}$$

Für U_3 haben wir

$$(\lambda f+\mu g)(t^2) = \lambda f(t^2)+\mu g(t^2) = \lambda f(t)+\mu g(t) = (\lambda f+\mu g)(t)\,,$$

auch das ist also ein Untervektorraum, genau wie U_4, denn liegen f, g in U_4, ist für alle $t\in\mathbb{R}$

$$(\lambda f+\mu g)(t+1) = \lambda f(t+1)+\mu g(t+1) = \lambda f(t)+\mu g(t) = (\lambda f+\mu g)(t)\,.$$

h) Zeigen Sie, daß $\varphi\colon \begin{cases} \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f \mapsto f' \end{cases}$ eine lineare Abbildung ist, und bestimmen Sie deren Kern und Bild!

Lösung: Da die Ableitung einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion insbesondere stetig ist, definiert φ zunächst einmal überhaupt eine Abbildung von $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ nach $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Mit der Linearität gibt es keine Probleme, da Differentiation eine lineare Operation ist:

$$(\lambda f+\mu g)'(t) = \lambda f'(t)+\mu g'(t)\,.$$

Im Kern liegen alle mindestens zweimal stetig differenzierbaren Funktionen, deren Ableitung die Nullfunktion ist, also genau die konstanten Funktionen. Im Bild liegen die sämtlichen Ableitungen von mindestens zweimal stetig differenzierbaren Funktionen; diese sind immer noch mindestens einmal stetig differenzierbar, und da die Stammfunktion jeder mindestens einmal stetig differenzierbaren Funktion mindestens zweimal stetig differenzierbar ist, sind das auch die sämtlichen Bilder. Also ist Bild $\varphi = \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

i) Zeigen Sie: $W = \big\{a\sin^2 t+b\cos^2 t+c \;\big|\; a,b,c\in\mathbb{R}\big\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$!

Lösung: Klar, denn alle betrachteten Funktionen sind stetig und jede Linearkombination solcher Funktionen ist wieder von derselben Bauart:

$$\begin{aligned}&\lambda\big(a\sin^2 t+b\cos^2 t+c\big)+\mu\big(a'\sin^2 t+b'\cos^2 t+c'\big)\\ &= (\lambda a+\mu a')\sin^2 t+(\lambda b+\mu b')\cos^2 t+(\lambda c+\mu c')\,.\end{aligned}$$

j) Bestimmen Sie für diesen Vektorraum W den Kern und das Bild der linearen Abbildung

$$\varphi\colon W\to\mathbb{R}^3;\quad f\mapsto \begin{pmatrix} f(0)\\ f(\frac{\pi}{2})\\ f(\pi)\end{pmatrix}\ !$$

Lösung: $\varphi(a\sin^2 t+b\cos^2 t+c) = \begin{pmatrix} a\sin^2 0+b\cos^2 0+c\\ a\sin^2\frac{\pi}{2}+b\cos^2\frac{\pi}{2}+c\\ a\sin^2\pi+b\cos^2\pi+c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+c\\ a+c\\ b+c\end{pmatrix}$,

also besteht der Kern aus allen Funktionen mit $a=b=-c$, d.h. den Funktionen der Art

$$a\sin^2 t+a\cos^2 t+a = a(\sin^2 t+\cos^2 t-a)\equiv 0\,.$$

Im Kern liegt daher nur die Nullfunktion; die Abbildung ist also injektiv.

Für jeden Vektor im Bild stimmen nach obiger Rechnung die erste und die dritte Komponente überein; umgekehrt läßt sich auch zu jedem Vektor mit gleicher erster und dritter Komponente ein Urbild finden:

$$\begin{pmatrix} b+c\\ a+c\\ b+c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\\ y\\ x\end{pmatrix} \Leftrightarrow b+c=x \text{ und } a+c=y \Leftrightarrow c=\frac{x+y}{2},\quad b=\frac{x-y}{2},\quad a=\frac{y-x}{2}\,.$$

k) Bestimmen Sie Kern und Bild der Abtastungsabbildung

$$\varphi\colon \begin{cases} \{a\sin t + b\sin 2t + c\sin 4t \mid a,b,c \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^5 \\ \qquad f \mapsto \left((f(0), f\left(\frac{\pi}{2}\right), f(\pi), f\left(\frac{3\pi}{2}\right), f(2\pi) \right) \end{cases} \quad !$$

Lösung: $$\varphi(a\sin t + b\sin 2t + c\sin 4t) = \begin{pmatrix} a\sin 0 + b\sin 0 + c\sin 0 \\ a\sin \pi/2 + b\sin\pi + c\sin 2\pi \\ a\sin\pi + b\sin 2\pi + c\sin 4\pi \\ a\sin\frac{3\pi}{2} + b\sin 3\pi + c\sin 6\pi \\ a\sin 2\pi + b\sin 4\pi + c\sin 8\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Kern von φ besteht daher genau aus den Funktionen der Form $b\sin 2t + c\sin 4t$ mit $b, c \in \mathbb{R}$, und

$$\text{Bild}\,\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}.$$