

18. Juli 2003

12. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) *Richtig oder falsch:* $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ und $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ seien differenzierbare Abbildungen. Dann ist auch $f \circ g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ differenzierbar und $J_{f \circ g}(\mathbf{x}) = J_g(\mathbf{x}) \cdot J_f(g(\mathbf{x}))$.
- 2) *Richtig oder falsch:* Falls alle zweiten partiellen Ableitungen von $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ existieren und stetig sind, ist die JACOBI-Matrix von f symmetrisch.
- 3) *Richtig oder falsch:* Wenn die Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ überall und zu jeder beliebigen Ordnung stetige partielle Ableitungen hat, ist sie um jeden Punkt durch eine TAYLOR-Reihe darstellbar.
- 4) Finden Sie eine Funktion $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \setminus C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$!
- 5) $\vec{V}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei ein mindestens zweimal differenzierbares Vektorfeld. Was ist $\text{grad div } \vec{V}$?

Aufgabe 1: (5 Punkte)

- a) Berechnen Sie für zwei Vektorfelder $\vec{V}, \vec{W} \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ die Divergenz von $\vec{V} \times \vec{W}$ auf möglichst kompakte Weise!
- b) Das Spatprodukt $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ dreier Vektoren ist bis auf das Vorzeichen unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren; insbesondere ist $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$. Wenden Sie diese Formel an auf die „Vektoren“ $\vec{a} = \nabla$, $\vec{b} = \vec{V}$ und $\vec{c} = \vec{W}$, und vergleichen Sie mit a)!

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Zeigen Sie: Für eine Funktion $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ und ein Vektorfeld $\vec{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \in C^2(D, \mathbb{R}^3)$ auf der offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^3$ gilt:

- a) $\text{div}(f\vec{V}) = (\text{grad } f) \cdot \vec{V} + f \text{div } \vec{V}$
- b) $\text{rot}(f\vec{V}) = (\text{grad } f) \times \vec{V} + f \text{rot } \vec{V}$
- c) $\text{rot}(\text{rot } \vec{V}) = \text{grad}(\text{div } \vec{V}) - \begin{pmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3: (5 Punkte)

- a) Berechnen Sie den Gradienten der Funktion $f_n: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^n} \end{cases}$ für eine beliebige positive reelle Zahl n !
- b) Was ist Δf_n ?
- c) Zeigen Sie: $\Delta f_n \equiv 0 \iff n = \frac{1}{2}$!

Keine Abgabe – am 25. Juli ist Semesterende