WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

4. Juli 2003

10. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist $\det A^* = \det A$.

2) Richtig oder falsch: Ein lineares Gleichungssystem aus n Gleichungen in n Unbekannten mit ganzzahligen Koeffizienten hat eine ganzzahlige Lösung, falls die Determinante seiner Matrix gleich $+1$ oder -1 ist.

3) Richtig oder falsch: Eine ganzzahlige $n \times n$-Matrix hat ein ganzzahliges Inverses, falls ihre Determinante gleich $+1$ oder -1 ist.

4) Richtig oder falsch: Falls eine ganzzahlige $n \times n$-Matrix ein ganzzahliges Inverses hat, ist ihre Determinante gleich $+1$ oder -1.

5) Richtig oder falsch: Die Summe zweier Normen ist wieder eine Norm.

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}$!

b) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für die die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ a \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

linear abhängig sind!

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*
Berechnen Sie die Determinante der $n \times n$-Matrix $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$!

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Die Vorschrift $\|\vec{v}\|_\Sigma \underset{\text{def}}{=} |v_1| + \cdots + |v_n|$ definiert eine Norm auf $\mathbb{R}^n$.

b) Bestimmen Sie für $n = 2$ die Menge $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_\Sigma \le 1 \right\}$.

c) Finden Sie Konstanten $c_1, c_2 > 0$, so daß gilt: $c_1 \|\vec{v}\|_\infty \le \|\vec{v}\|_\Sigma \le c_2 \|\vec{v}\|_\infty$ für alle $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, wobei $\|\vec{v}\|_\infty$ die Maximumsnorm bezeichnet!

Abgabe bis zum Freitag, dem 11. Juli 2003, um 12.00 Uhr