WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

2. Juli 2003

Lösungen zu Aufgabe 3 des 6. Übungsblatts

Aufgabe 3: (*6 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 2 & 3 & 4 \\ 2-2a & a-6 & -3 & -4 \\ a-1 & 6-2a & a-6 & 0 \\ 0 & (a+1)(a-2) & 9+4a-a^2 & a-8 \end{pmatrix}$$

Hierzu müssen wir im Schema

$$\begin{array}{cccccccc} a-1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2-2a & a-6 & -3 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a-1 & 6-2a & a-6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & (a+1)(a-2) & 9+4a-a^2 & a-8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

versuchen, links eine obere Dreiecksmatrix zu erzeugen.

Addition der zweifachen ersten Zeile zur zweiten und Subtraktion der ersten Zeile von der dritten macht daraus

$$\begin{array}{cccccccc} a-1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-2 & 3 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4-2a & a-3 & -4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & (a+1)(a-2) & 9+4a-a^2 & a-8 & 0 & 0 & 0 & 1\,. \end{array}$$

Als nächstes addieren wir das zweifache der zweiten Zeile zur driten und subtrahieren ihr $(a+1)$-faches von der vierten; dies ergibt das Schema

$$\begin{array}{cccccccc} a-1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-2 & 3 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-3 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6+a-a^2 & -3a-12 & -2a-2 & -a-1 & 0 & 1\,. \end{array}$$

Da $6+3-3^2=0$ verschwindet, ist 3 eine Nullstelle von $6+a-a^2$; das Produkt mit der anderen ist nach dem Wurzelsatz von VIÈTE gleich -6, d.h.

$$6+a-a^2 = (a-3)(-a-2)\,.$$

Also addieren wir die $(a+2)$-fache dritte Zeile zur vierten und kommen so auf die Endgestalt

$$\begin{array}{cccccccc} a-1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-2 & 3 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-3 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-4 & a+4 & a+3 & a+2 & 1 \end{array}$$

Somit ist

$$R = \begin{pmatrix} a-1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & a-2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & a-3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & a-4 \end{pmatrix} \quad\text{und}\quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ a+4 & a+3 & a+2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Geben Sie, in Abhängigkeit von a und einer beliebigen rechten Seite, die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$ durch möglichst einfache Formeln an!

Multiplikation mit L macht das Gleichungssystem zu

$$R \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = L \cdot \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix},$$

ausgeschrieben

$$\begin{aligned} (a-1)x + 2y + 3z + 4w &= b \\ (a-2)y + 3z + 4w &= 2b + c \\ (a-3)z + 4w &= 3b + 2c + d \\ (a-4)w &= (a+4)b + (a+3)c + (a+2)d + e\,. \end{aligned}$$

Also ist für $a \neq 4$

$$w = \frac{(a+4)b + (a+3)c + (a+2)d + e}{a-4}\,.$$

Setzt man dies ein in die dritte Gleichung, folgt für $a \neq 3$

$$z = \frac{3b + 2c + d - 4w}{a-3}\,.$$

Entsprechend ist für $a \neq 2$

$$y = \frac{2b + c - 3z - 4w}{a-2}$$

und für $a \neq 1$

$$x = \frac{b - 2y - 3z - 4w}{a-1}\,.$$

Für $a \notin \{1,2,3,4\}$ haben wir somit die Lösung gefunden.

Für $a \in \{1,2,3,4\}$ ist das Gleichungssystem *im allgemeinen* unlösbar, da hier Gleichungen der Form $0 \cdot u = v$ auftreten, was nur für $v = 0$ lösbar ist und in diesem Fall keinerlei Bedingung an v stellt.

Für $a = 4$ ist also das Gleichungssystem unlösbar, falls

$$(a+4)b + (a+3)c + (a+2)d + 2 \neq 0$$

ist; ist dieser Ausdruck gleich null, ist w beliebig und x, y, z ergeben sich aus den obigen Formeln.

Für $a = 3$ muß bei Lösbarkeit für das oben berechnete w gelten

$$4w = 3b + 2c + d\,;$$

dann ist z beliebig und x, y berechnen sich aus den obigen Formeln.

Für $a = 2$ lautet die Lösbarkeitsbedingung

$$3z + 4w = 2b + c\,,$$

wobei w und z nach obigen Formeln berechnet werden, y dann beliebig ist und für x wieder die angegebene Formel gilt.
Für $a = 1$ schließlich können w, z, y wie oben berechnet werden; falls dann

$$2y + 3z + 4w = b$$

ist, ist x beliebig; ansonsten ist das Gleichungssystem unlösbar.