

23. Mai 2003

## 4. Übungsblatt Höhere Mathematik I

**Fragen:** (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) *Richtig oder falsch:* Für  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $p, q \in \mathbb{N}$  ist  $A^p \cdot A^q = A^q \cdot A^p$ .
- 2) *Richtig oder falsch:* Für  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  ist  $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ .
- 3) *Richtig oder falsch:* Für die Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  sei  $A^2$  die Nullmatrix. Dann ist auch  $A$  gleich der Nullmatrix.
- 4) *Richtig oder falsch:* Für die Matrix  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  sei  $A^2 = A$ . Dann ist  $A$  entweder die Nullmatrix oder die Einheitsmatrix.
- 5)  $\mathbb{C}$  werde aufgefaßt als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Basisvektoren  $1, i$ . Welche Abbildungsmatrix hat die komplexe Konjugation  $z \mapsto \bar{z}$ ?

**Aufgabe 1:** (5 Punkte)

Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  und  $B_n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2 + n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  für  $n \in \mathbb{Z}$ . Zeigen Sie:

- a) Für alle  $n, m \in \mathbb{Z}$  ist  $B_n \cdot B_m = B_{n+m}$ .
- b) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist  $A^n = B_n$ .
- c)  $A$  ist invertierbar und  $A^{-1} = B_{-1}$ .
- d) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist  $A^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} (A^{-1})^n = B_{-n}$ .

**Aufgabe 2:** (5 Punkte)

In einem Netzwerk aus  $n$  Rechnern gebe es zwischen gewissen Rechnern direkte (bidirektionale) Verbindungen; die Matrix  $A$  sei so definiert, daß  $a_{ij} = a_{ji} = 1$  ist, wenn dies für die Rechner  $i$  und  $j$  der Fall ist, und  $a_{ij} = a_{ji} = 0$  sonst. Die Diagonalelemente  $a_{ii}$  seien alle gleich Eins. Zeigen Sie:

- a) Alle Einträge  $b_{ik}$  der Matrix  $B = A^2$  sind ganze Zahlen mit  $0 \leq b_{ik} \leq n$ .
- b) Für die Rechner  $i$  und  $k$  gibt es  $b_{ik}$  Möglichkeiten, via höchstens einen Zwischenknoten miteinander zu kommunizieren.
- c) Genau dann kann jeder Rechner mit jedem anderen kommunizieren, wenn die Matrix  $A^{n-1}$  keinen Eintrag Null enthält.

**Aufgabe 3:** (5 Punkte)

$V$  sei der Untervektorraum von  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  mit Basis  $\{e^{-2t}, e^{-t}, 1, e^t, e^{2t}\}$ .

- a) Bestimmen Sie bezüglich dieser Basis die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung

$$\varphi: V \rightarrow V; \quad f \mapsto \frac{d^2 f}{dt^2}!$$

- b) Bestimmen Sie Basen von Kern und Bild von  $\varphi$ !
- c) Zeigen Sie: Jedes Element  $f \in V$  läßt sich auf genau eine Weise schreiben als  $f = g + h$  mit  $g \in \text{Kern } \varphi$  und  $h \in \text{Bild } \varphi$ !

Abgabe bis zum Freitag, dem 30. Mai 2003, um 12.00 Uhr