

2. Mai 2002

1. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: (je ein Punkt)

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.

- 1) *Richtig oder falsch:* Die leere Menge ist ein \mathbb{R} -Vektorraum.
- 2) *Richtig oder falsch:* Die Menge $\{0\}$ ist ein \mathbb{R} -Vektorraum.
- 3) *Richtig oder falsch:* Die Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ xy \end{pmatrix}$ ist linear.
- 4) *Richtig oder falsch:* Die Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x + y + 1$ ist linear.
- 5) *Richtig oder falsch:* Ist $\varphi: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung und $U \leq V$ Untervektorraum von V , so ist auch die Einschränkung $\varphi|_U: U \rightarrow W; \vec{u} \mapsto \varphi(\vec{u})$ linear.

Aufgabe 1: (5 Punkte)

- a) Zeigen Sie: Die reellen Polynome vom Grad höchstens vier bilden einen \mathbb{R} -Vektorraum.
- b) Für welche $a_0 \in \mathbb{R}$ bilden die Polynome vom Grad höchstens vier mit konstantem Koeffizienten a_0 einen Untervektorraum?
- c) Ist auch die Menge aller reeller Polynome vom Grad genau vier ein \mathbb{R} -Vektorraum?
- d) Ist auch die Menge *aller* reeller Polynome ein \mathbb{R} -Vektorraum?

Aufgabe 2: (5 Punkte)

- a) Zeigen Sie: Die Abbildung $\varphi: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x + 2y - z \\ 2x + 3y - z \end{pmatrix} \end{cases}$ ist linear.
- b) Bestimmen Sie den Kern von φ !

Aufgabe 3: (5 Punkte)

- a) Zeigen Sie: $V = \{a \sin t + b \cos t \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ ist ein \mathbb{R} -Vektorraum.
- b) Die Abbildung $\varphi: \begin{cases} V \rightarrow V \\ f \mapsto \frac{df}{dt} \end{cases}$ ist linear.
- c) Bestimmen Sie Kern und Bild der Abtastungsabbildung

$$\varphi: \begin{cases} V \rightarrow \mathbb{R}^6 \\ f \mapsto (f(0), f(\pi), f(2\pi), f(3\pi), f(4\pi), f(5\pi)) \end{cases} !$$

Abgabe bis zum Freitag, dem 9. Mai 2003, um 12.00 Uhr