# Lösungen der Aufgaben des HM-Teils

Wolfgang K. Seiler

**Fragen:** *(je* **zwei** *Punkte)*
*Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine* kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

*1)* Die differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei Stammfunktion von sich selbst. Was können Sie über f sagen?

**Lösung:** Wenn f Stammfunktion von sich selbst ist, muß $f'(x) = f(x)$ sein. Diese Differentialgleichung erfüllen, wie wir wissen, nur die Funktionen $f(x) = ae^x$ mit $a \in \mathbb{R}$.
*Viele haben hier den Faktor $a$ vergessen und hielten die Lösung für eindeutig, was wir bewiesen haben ist aber nur, daß die Lösung des* Anfangswertproblems $f'(x) = f(x)$ und $f(0) = a$ *eindeutig ist; um die Exponentialfunktion selbst eindeutig zu bestimmen, müßten wir also noch zusätzlich fordern, daß* $f(0) = 1$ ist.*

*2)* Was ist $\int_{-2}^{1} \frac{dx}{x^4}$ ?

**Lösung:** Dieses uneigentliche Integral existiert nicht (und hat auch keinen Cauchyschen Hauptwert). Jede Stammfunktion geht bei rechtsseitiger Annäherung an Null gegen $+\infty$, bei linksseitiger aber gegen $-\infty$. Damit kann kein Grenzwert für die Differenz existieren.

*3)* Für die reelle $n \times n$-Matrix A sei $A^2 = A$. Was können Sie über $\det A$ sagen?

**Lösung:** Wegen $\det A^2 = (\det A)^2$ (Multiplikationssatz) ist $(\det A)^2 = \det A$, also ist $\det A = 0$ oder $\det A = 1$.
*Hier haben viele versucht, die Matrix $A$ selbst zu bestimmen und (meist) behauptet, $A$ sei gleich der Einheitsmatrix. Dies stimmt aber nur für* invertierbares $A$, *denn nur dann kann man beide Seiten mit $A^{-1}$ multiplizieren. Im folgenden seien einige $2 \times 2$-Matrizen genannt, die die Gleichung $A^2 = A$ erfullen:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

*4)* Richtig oder falsch: Ein Vektorfeld $\vec{V}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist genau dann zirkulationsfrei, wenn seine Jacobi-Matrix symmetrisch ist.

**Lösung:** *Richtig,* denn Symmetrie der Jacobi-Matrix ist äquivalent zum Verschwinden der Rotation, und das, da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, zur Zirkulationsfreiheit.
*Das oft zitierte Gegenbeispiel des Magnetfelds eines stromdurchflossenen Leiters ist auf dem Leiter selbst nicht definiert, da dort ein Nenner Null auftritt; es ist also kein Vektorfeld $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, sondern ist nur auf dem Komplement einer Geraden definiert.*

*5)* Richtig oder falsch: Falls der Fluß eines Vektorfelds durch die Oberfläche eines Volumens verschwindet, ist im Innern die Divergenz des Vektorfelds identisch Null.

**Lösung:** *Falsch:* Der Satz von Gauss sagt nur, daß das Volumenintegral über die Divergenz verschwindet. Beim E-Feld zweier entgegengesetzt gleicher symmetrisch zueinander angeordneter Ladungsverteilungen etwa ist das Integral über die Divergenz null, aber die lokale Ladungsdichte = Divergenz nicht.

**Aufgabe 1:** *(7 Punkte)*
Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei periodisch mit Periode $2\pi$ und für $0 \le t < 2\pi$ sei

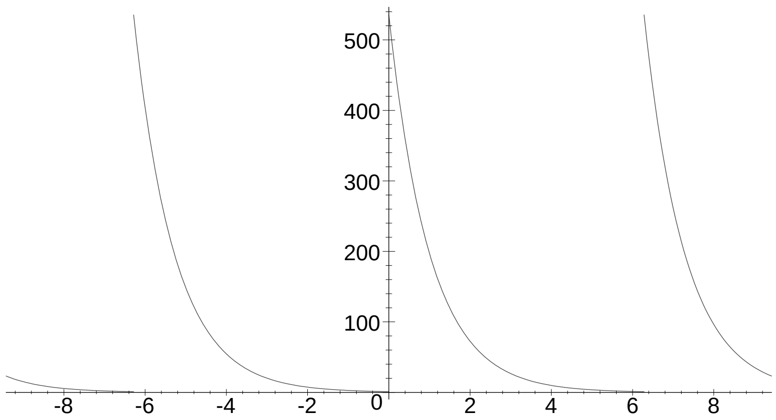
$$f(t) = e^{2\pi - t}.$$

*a)* Skizzieren Sie die Funktion f für $-3\pi \le t \le 3\pi$! (*Hinweis:* $e^{\pi} \approx 23{,}14$ und $e^{2\pi} \approx 535{,}5$.)

*b)* Ist f gerade, ungerade, beides oder keins von beiden?

*c)* Berechnen Sie die FOURIER-Reihe von f! (Es bleibt Ihnen überlassen, ob sie die Rechnung lieber in komplexer oder in reeller Form durchführen wollen, das Endergebnis sollte aber in reeller Form angegeben werden.)

**Lösung:** *a)*




*b)* Da wir es mit einer Exponentialfunktion zu tun haben, sollte die Rechnung wohl in der komplexen Form einfacher sein: Schließlich geht es dann nur um die Integration einer (komplexen) Exponentialfunktion statt um die Integration von Produkten aus Exponentialfunktion und trigonometrischen Funktionen.

Nach der allgemeinen Formel ist die komplexe FOURIER-Reihe zur Funktion f im Falle der Periode $2\pi$, für $\omega = 1$ also, die Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt.$$

Also ist

$$\begin{aligned} 2\pi c_k &= \int_0^{2\pi} e^{2\pi - t} e^{-ikt}\, dt = \int_0^{2\pi} e^{2\pi} e^{-t(1+ik)}\, dt = \frac{-e^{2\pi}}{1+ik} e^{-t(1+ik)} \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{-e^{2\pi}(1-ik)}{1+k^2}\left(e^{-2\pi-2k\pi i} - e^0\right) = \frac{-e^{2\pi}(1-ik)}{1+k^2}\left(e^{-2\pi} - 1\right) = \left(e^{2\pi} - 1\right)\frac{1-ik}{1+k^2} \end{aligned}$$

und damit

$$c_k = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \, \frac{1 - ik}{1 + k^2}.$$

Hiermit ist die komplexe Form der FOURIER-Reihe klar; gefragt war aber nach der reellen.

Den Zusammenhang zwischen den reellen und den komplexen FOURIER-Koeffizienten kann man sich, so man ihn nicht auswendig weiß, leicht herleiten: Aufgrund der EULERschen Formeln tragen für $k \geq 1$ die Terme $c_k e^{ikt}$ und $c_{-k} e^{-ikt}$ zu $a_k \cos kt$ und $b_k \sin kt$ bei, d.h. wegen

$$\begin{aligned} c_k e^{ikt} + c_{-k} e^{-ikt} &= c_k \cos kt + c_{-k} \cos(-kt) + ic_k \sin kt + ic_{-k} \sin(-kt) \\ &= (c_k + c_{-k}) \cos kt + i(c_k - c_{-k}) \sin kt \end{aligned}$$

ist

$$a_k = c_k + c_{-k} \quad \text{und} \quad b_k = i(c_k - c_{-k}) .$$

Im vorliegenden Fall wird dies zu

$$a_k = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \frac{2}{1 + k^2} = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi} \frac{1}{1 + k^2} \quad \text{und} \quad b_k = i \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \frac{-2ik}{1 + k^2} = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi} \frac{k}{1 + k^2} .$$

Der konstante Term ist natürlich

$$c_0 = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} .$$

Somit ist die FOURIER-Reihe zur Funktion $f(t)$ die Reihe

$$\frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi} \frac{1}{1 + k^2} \cos kt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi} \frac{k}{1 + k^2} \sin kt .$$

**Aufgabe 2:** (*6 Punkte*)
Berechnen Sie die Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x - \phantom{2}y + az &= 0 \\ 3x + \phantom{2}y - 6z &= 5 \\ -2x - 2y + 4z &= 2b \end{aligned}$$

in Abhängigkeit von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$!

**Lösung:** Zur Elimination von $x$ aus der zweiten *bzw.* dritten Gleichung addieren wir das $(-3)$-fache *bzw.* das zweifache der ersten Gleichung und erhalten die neuen Gleichungen

$$\begin{aligned} 4y - (6 + 3a)z &= 5 \\ -4y + (4 + 2a)z &= 2b . \end{aligned}$$

Addition dieser beiden Gleichungen führt auf

$$-(2 + a)z = 5 + 2b .$$

Falls $2 + a$ nicht verschwindet, falls also $a \neq -2$ ist, können wir durch den vor $z$ stehenden Faktor dividieren und erhalten

$$z = -\frac{5 + 2b}{2 + a} \quad \text{falls} \quad a \neq -2 .$$

Für $a = -2$ haben wir die Gleichung $0 \cdot z = 5 + 2b$; für $b \neq -\frac{5}{2}$ ist diese Gleichung und somit das gesamte LGS unlösbar; für $b = -\frac{5}{2}$ degeneriert die Gleichung zur Tautologie $0 \cdot z = 0$, so daß in diesem Fall $z$ beliebig sein kann.
Die Gleichung $4y - (6 + 3a)z = 5$ sagt uns, daß – unabhängig von $a$ und $b$ –

$$y = \frac{5 + (6 + 3a)z}{4}$$

ist, und genauso problemlos liefert uns die erste Gleichung des LGS, daß

$$x = y - az = \frac{5 + (6 + 3a)z}{4} - az = \frac{5 + (6 - a)z}{4}$$

ist.
Somit erhalten wir als Ergebnis:
Falls $a = -2$ und $b \neq -\frac{5}{2}$ ist, gibt es keine Lösung.
Für $a = -2$ und $b = -\frac{5}{2}$ ist $z$ beliebig,

$$y = \frac{5 + (6 + 3a)z}{4} = \frac{5}{4} \quad \text{und} \quad x = \frac{5 + (6 - a)z}{4} = \frac{5}{4} + 2z\,.$$

Für $a \neq -2$ schließlich ist $z = (5 + 2b)/(a + 2)$,

$$y = \frac{5 + (6 + 3a)z}{4} = -\frac{5 + 3b}{2}$$

und

$$x = \frac{5 + (6 - a)z}{4} = \frac{5}{4} - \frac{(6 - a)(5 + 2b)}{a + 2} = \frac{-10 - 6b + 5a + ab}{2a + 4}$$

die einzige Lösung.

**Aufgabe 3:** (*5 Punkte*)
Die Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch die Bedingung

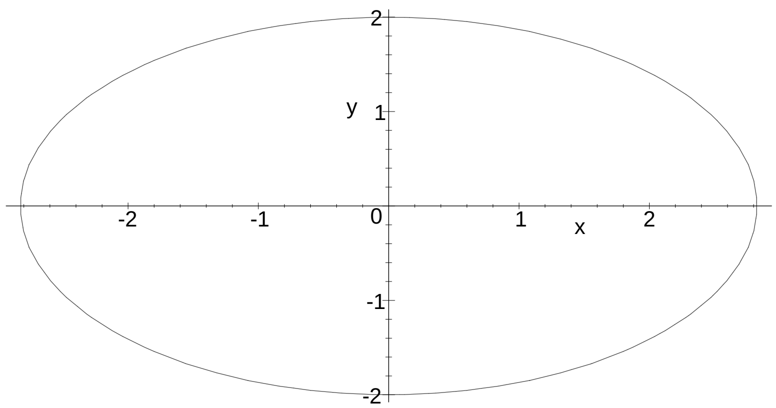
$$x^2 + 2y^2 = 8\,.$$

*a)* Skizzieren Sie $M$ !
*b)* Bestimmen Sie die Maxima von $f(x, y) = xy$ auf $M$ !

**Lösung:** *a)* $M$ ist natürlich eine Ellipse; wie die äquivalente Form

$$\left(\frac{x}{\sqrt{8}}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$

der Gleichung zeigt, hat sie die beiden Halbachsen $\sqrt{8}$ und 2.



*b)* Falls $f$ in einem Punkt auf $M$ ein Extremum annimmt, müssen dort die Gradienten von $f$ und $g(x,y) = x^2 + 2y^2 - 8$ linear abhängig sein. Falls der Gradient von $g$ verschwindet, müssen $g_x = 2x$ und $g_y = 4y$ simultan verschwinden; dies passiert nur im Nullpunkt, der nicht auf $M$ liegt. Somit können wir diesen Fall vernachlässigen und den üblichen Ansatz mit LAGRANGEschen Multiplikatoren machen.

Wir betrachten also die Funktion

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = xy + \lambda(x^2 + 2y^2 - 8)$$

und die Bedingungen, die das Verschwinden ihres Gradienten stellt.

$$\begin{aligned} F_x &= y + 2\lambda x \\ F_y &= x + 4\lambda y \\ F_\lambda &= x^2 + 2y^2 - 8 \end{aligned}$$

Falls alle drei Komponenten verschwinden, ist nach der ersten Gleichung, multipliziert mit $x$,

$$xy = -2\lambda x^2$$

und nach der zweiten, multipliziert mit $y$,

$$xy = -4\lambda y^2 .$$

Dies kann nur dann beides gleichzeitig gelten, wenn entweder $\lambda$ verschwindet oder $y^2 = 2x^2$ ist. Falls $\lambda$ verschwindet, sind wir im Fall $\nabla f = \vec{0}$, d.h. wir suchen nach einem Maximum von $f$ auf $\mathbb{R}^3$, was es nicht gibt. Also ist in jedem Extremum auf $M$

$$x^2 = 2y^2 .$$

Eingesetzt in die dritte Gleichung (oder direkt in die damit äquivalente Gleichung von $M$) ergibt dies die Beziehung

$$2y^2 + 2y^2 = 8 \quad \text{oder} \quad y = \pm\sqrt{2} .$$

Alsdann ist $x^2 = 4$, also $x = \pm 2$, wobei das Vorzeichen unabhängig ist vom Vorzeichen von $x$. Der Funktionswert in diesen Punkten ist $\pm 2\sqrt{2} = \pm\sqrt{8}$, wobei das Vorzeichen genau dann positiv ist, wenn $x$ und $y$ gleiches Vorzeichen haben.

Da $M$ kompakt ist und $f$ stetig, wissen wir, daß $f$ tatsächlich sowohl sein Maximum als auch sein Minimum annimmt, also ist $\sqrt{8}$ das Maximum und $-\sqrt{8}$ das Minimum von $f$ auf $M$.

Der Maximalwert wird nach obiger Diskussion angenommen in den Punkten $(2, \sqrt{2})$ und $(-2, -\sqrt{2})$.

Einige Studenten haben die Aufgabe auch ohne LAGRANGEsche Multiplikatoren gelöst, indem Sie das Problem durch Auflösung der Ellipsengleichung auf eine gewöhnlich Maximumsaufgabe in $\mathbb{R}$ zurückgeführt haben. Am einfachsten ist hier der Ansatz von Herrn RHEINWALD: Da das Maximum von $f(x,y) = xy$ auf der Ellipse offensichtlich positiv sein muß, haben $x$ und $y$ im Maximum dasselbe Vorzeichen; wegen der Symmetrie zum Nullpunkt genügt es für die Berechnung dieses Maximums, den Quadranten $x, y \geq 0$ zu betrachten. Dort kann die Ellipstengleichung $x^2 + 2y^2 = 8$ aufgelöst werden zu

$$y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{2}} ,$$

also müssen die Maximalwerte der Funktion

$$x \mapsto x\sqrt{4 - \frac{x^2}{2}}$$

im positiven Bereich bestimmt werden.

In den Punkten, in denen diese Funktion maximal wird, nimmt auch ihr Quadrat

$$h(x) = x^2\left(4 - \frac{x^2}{2}\right) = 4x^2 - \frac{x^4}{2}$$

ein Maximum an, d.h.

$$h'(x) = 8x - 2x^3 = 2x(4 - x^2) = 0\,.$$

Die Nullstelle $x = 0$ führt nicht zu einem Maximum, bleibt also (wegen $x \geq 0$) nur noch $x = 2$. Hier ist $y = \sqrt{4 - 4/2} = \sqrt{2}$, das Maximum im ersten Quadranten liegt also im Punkt $(2, \sqrt{2})$, und symmetrisch dazu gibt es ein Maximum bei $(-2, -\sqrt{2})$ im dritten Quadranten.

**Aufgabe 4:** *(5 Punkte)*

Sei $V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 100 \text{ und } 0 \leq z \leq 1\right\}$.

*a)* Beschreiben Sie die Menge $V$ geometrisch!

*b)* Berechnen Sie das Volumenintegral

$$\iiint_V \cos(x^2 + y^2) \sin \pi z \, dx\, dy\, dz\,!$$

**Lösung:** *a)* Für $z = 0$ beschreibt $x^2 + y^2 \leq 10^2 = 100$ eine Kreisscheibe vom Radius zehn um den Nullpunkt in der $(x, y)$-Ebene; da $z$ hier zwischen Null und eins variieren darf, ist $V$ also ein Zylinder der Höhe eins über dieser Kreisscheibe.

*b)* Da wir schon über einen Zylinder integrieren, bietet sich die Verwendung von Zylinderkoordinaten an:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

In diesen Koordinaten ausgedrückt ist

$$\iiint_V \cos(x^2 + y^2) \sin \pi z \, dx\, dy\, dz = \iiint_V \cos r^2 \sin \pi z \, r\, dr\, d\varphi\, dz\,.$$

Hier sind die Variablen voneinander getrennt; wir können das Integral also ausrechnen als

$$\begin{aligned} &\int_0^{10} r \cdot \cos r^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \sin \pi z \, dz\right) d\varphi\right) dr \\ = &\int_0^{10} r \cdot \cos r^2 \left(\int_0^{2\pi} \frac{-\cos \pi + \cos 0}{\pi} \, d\varphi\, d\varphi\right) dr \\ = &\int_0^{10} r \cdot \cos r^2 \cdot 4 \, dr = 2 \sin r^2 \Big|_0^{10} = 2 \sin(100)\,. \end{aligned}$$

**Aufgabe 5:** *(9 Punkte)*

Hier geht es um die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

*a)* Zeigen Sie, daß der $\mathbb{R}^3$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von $A$ hat.

*b)* Berechnen Sie den Rang der Matrix $A+2E$ ($E =$ Einheitsmatrix) und zeigen Sie so, daß $\lambda = -2$ Eigenwert von $A$ ist.

*c)* Berechnen Sie eine Basis des zugehörigen Eigenraums!

*d)* Bestimmen Sie die restlichen Eigenwerte von $A$ sowie die zugehörigen Eigenräume. (*Hinweis:* Alle Eigenwerte von $A$ sind ganzzahlig.)

*e)* Geben Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ an, bezüglich derer $A$ Diagonalgestalt hat, und bestimmen Sie diese Diagonalgestalt.

**Lösung:** *a)* Da $A$ eine symmetrische Matrix ist, sind alle Eigenwerte reell und ihre geometrische Vielfachheit ist gleich der algebraischen; es gibt daher eine Basis aus Eigenvektoren von $A$. Da Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix aufeinander senkrecht stehen, wenn sie zu verschiedenen Eigenwerten gehören, und da man im Eigenraum zu jedem einzelnen Eigenwert nach GRAM-SCHMID Orthonormalbasen konstruieren kann, hat auch der $\mathbb{R}^3$ eine ON-Basis aus Eigenvektoren von $A$.

*b)* In

$$A + 2E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

sind die erste und die dritte Zeile identisch, also ist der Rang höchstens gleich zwei. Wäre er kleiner als zwei, müssten alle drei Zeilen proportional sein, was nicht der Fall ist, denn $3 : 2 \neq 2 : 8$. Also hat $A + 2E$ den Rang zwei. Insbesondere ist $A + 2E = A - (-2)E$ nicht invertierbar; mithin ist $\lambda = -2$ Eigenwert.

*c)* Der Eigenraum ist der Lösungsraum des LGS $(A + 2E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$; da der Rang der Matrix dieses LGS gleich zwei ist, ist der Lösungsraum also eindimensional. Da die erste und die letzte Spalte der Matrix $A + 2E$ übereinstimmen, sind alle Vektoren der Form ${}^t(c, 0, -c)$ mit $c \in \mathbb{R}$ Lösungen; diese bilden bereits einen eindimensionalen Raum und sind somit alle Lösungen. Eine Basis dieses Raumes besteht beispielsweise aus dem Vektor ${}^t(1, 0, -1)$ oder auch aus ${}^t(-1, 0, 1)$ oder irgendeinem anderen vom Nullvektor verschiedenen Vielfachen davon.

*d)* Außer dem Rechenaufwand spricht nichts dagegen, die Eigenwerte über das charakterische Polynom

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 6-\lambda & 2 \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

beispielsweise nach der SARRUSschen Regel zu berechnen; richtiges Rechnen vorausgesetzt, erhält man als Ergebnis

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + 8\lambda^2 + 4\lambda - 32\,.$$

Gleichzeitig ist, wenn $\lambda_1, \lambda_2$ und $\lambda_3$ die Nullstellen dieser Gleichung sind,

$$P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda)\,;$$

das Produkt aller drei Eigenwerte muß also $-32$ sein. Aus *b)* wissen wir bereits, daß $-2$ eine Nullstelle ist; das Produkt der restlichen beiden muß also gleich 16 sein, und kurzes Probieren zeigt, daß $\lambda = 2$ und $\lambda = 8$ die beiden restlichen Nullstellen sind.

(Alternativ könnte man, da wir die Nullstelle $-2$ bereits kennen, das Polynom auch durch den Linearfaktor $(\lambda + 2)$ dividieren; das Ergebnis

$$P(\lambda)/(\lambda + 2) = -\lambda^2 + 10\lambda - 16$$

ergibt eine quadratische Gleichung, deren Nullstellen 2 und 8 man auch aus der wohlbekannten Formel erhält.

Wer gerne möglichst wenig rechnet, kann all dies natürlich durch geeignete Tricks umgehen: Da wir schon wissen, daß $A+2E$ nicht invertierbar ist, würde sich beispielsweise auch anbieten,

$$A - \lambda E = (A + 2E) - \mu E \quad \text{mit} \quad \mu = \lambda + 2$$

zu schreiben; dann ist

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 3-\mu & 2 & 3 \\ 2 & 8-\mu & 2 \\ 3 & 2 & 3-\mu \end{pmatrix} .$$

Subtraktion der dritten Zeile von der ersten und dann Addition der ersten Spalte zur dritten zeigt, daß

$$\det \begin{pmatrix} 3-\mu & 2 & 3 \\ 2 & 8-\mu & 2 \\ 3 & 2 & 3-\mu \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\mu & 0 & \mu \\ 2 & 8-\mu & 2 \\ 3 & 2 & 3-\mu \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\mu & 0 & 0 \\ 2 & 8-\mu & 4 \\ 3 & 2 & 6-\mu \end{pmatrix}$$

ist, und diese Determinante läßt sich nun einfach nach der ersten Zeile entwickeln zu

$$-\mu\big((8-\mu)(6-\mu) - 8\big) = -\mu(40 - 14\mu + \mu^2) = -\mu\big((\mu-7)^2 - 9\big) .$$

Der erste Faktor liefert die bereits bekannte Lösung $\mu = 0$ oder $\lambda = -2$, der zweite führt auf $\mu = 7 \pm \sqrt{9} = 4$ oder 10, was den Eigenwerten $\lambda = 2$ und $\lambda = 8$ entspricht.

Am einfachsten und elegantesten ist wohl die Lösung von Herrn KAPP: Das Produkt der drei Eigenwerte ist gleich der Determinanten der Matrix $A$, die man leicht als -32 berechnet, und die Summe ist gleich der Spur $1 + 6 + 1 = 8$ von $A$. Da $\lambda_1 = -2$ bereits als Eigenwert bekannt ist, haben die beiden restlichen Eigenwerte $\lambda_{2/3}$ also die Summe 8 und das Produkt 16; da sie laut Aufgabenstellung ganzzahlig sind, sieht man schnell, daß sie gleich 2 und 8 sein müssen.)

Nachdem man so auf irgendeine Weise die drei Eigenwerte von $A$ gefunden hat, müssen als nächstes die zugehörigen Eigen*vektoren* bestimmt werden. Für $\lambda = -2$ haben wir das bereits in *c)* erledigt. Für $\lambda = 2$ und $\lambda = 8$ wissen wir immerhin, daß der Eigenraum eindimensional ist, denn seine Dimension ist die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts, die kleiner oder gleich der algebraischen ist; bei einer kubischen charakterischen Gleichung mit drei verschiedenen Nullstellen ist natürlich die algebraische Vielfachheit jeder Nullstelle gleich eins. (Überhaupt ist bei einer symmetrischen Matrix die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts immer gleich der algebraischen.)

Für $\lambda = 2$ müssen wir daher eine nichttriviale Lösung des LGS

$$(A - 2E) \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

finden; da der Lösungsraum eindimensional ist, wird er von dieser einen Lösung aufgespannt.

Natürlich liefert der GAUSS-Algorithmus auch hier zuverlässig und relativ schnell eine Lösung; wir können aber auch eine erraten: Die Summe der ersten und der dritten Spalte ist gleich der mittleren Spalte von $A - 2E$, d.h. ${}^t(1, -1, 1)$ ist eine Lösung und spannt somit den Eigenraum auf.

Für $\lambda = 8$ haben wir das LGS

$$(A - 8E) \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{0} ;$$

auch hier lohnt es sich, wegen der großen Ähnlichkeit zwischen erster und dritter Spalte, diese versuchsweise zu addieren: Die Summe ist ${}^t(-4, 4, -4)$ und somit das $(-2)$-fache der mittleren Spalte; unsere gesuchte spezielle Lösung, die den Eigenraum aufspannt, ist also zum Beispiel ${}^t(1,2,1)$.

*e)* $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von $A$ (sogar eine Orthogonalbasis, wie sich das bei einer symmetrischen Matrix gehört), also hat $A$ bezüglich dieser Basis Diagonalgestalt. Da jeder Eigenvektor mit dem zugehörigen Eigenwert multipliziert wird, ist diese Diagonalgestalt bei obiger Anordnung der Basisvektoren gleich

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 6:** (*8 Punkte*)

**Hinweis:** *Die Ergebnisse von Aufgabe 5 können auch bei der Bearbeitung dieser Aufgabe nützlich sein.*

Im $\mathbb{R}^3$ sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) + 2y(t) + 3z(t) \\ y'(t) &= 2x(t) + 6y(t) + 2z(t) \\ z'(t) &= 3x(t) + 2y(t) + z(t) \end{aligned}$$

gegeben.

*a)* Für eine spezielle Lösungskurve $\gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ gelte

$$x(10) = x_0, \quad y(10) = y_0 \quad \text{und} \quad z(10) = z_0 .$$

Geben Sie mit Hilfe einer Matrixexponentialfunktion eine Formel für $\gamma(t)$ an! (Die Matrixexponentialfunktion soll dabei noch *nicht* weiter ausgerechnet werden.)

*b)* Finden Sie Linearkombinationen $u(t), v(t), w(t)$ der Funktionen $x(t), y(t), z(t)$, die Differentialgleichungen der Form

$$u'(t) = au(t), \quad v'(t) = bv(t) \quad \text{und} \quad w'(t) = cw(t)$$

genügen, und geben Sie deren Lösungsfunktionen $u(t), v(t), w(t)$ für das Anfangswertproblem

$$u(10) = u_0, \quad v(10) = v_0 \quad \text{und} \quad w(10) = w_0$$

explizit an!

*c)* Stellen Sie $x(t), y(t), z(t)$ als Linearkombinationen der Funktionen $u(t), v(t), w(t)$ dar, und geben Sie dann auch für das in *a)* gestellte Anfangswertproblem die Lösungsfunktionen $x(t), y(t), z(t)$ explizit an!

*d)* Speziell sei $x_0 = -3, y_0 = 0$ und $z_0 = 3$. Welche Funktionen liefern Ihre Formeln hierfür?

*e)* Nun werde das Problem aus *d)* leicht variiert, indem $x_0, y_0, z_0$ alle drei um 0,001 verändert werden. Ändert sich dadurch etwas am qualitativen Verhalten der Lösungen?

**Lösung:** *a)* Die Matrix dieses linearen homogenen Systems von Differentialgleichungen ist gerade die Matrix $A$ aus Aufgabe fünf, und wie wir aus der Vorlesung wissen, ist die gesuchte Lösung gleich

$$\gamma(t) = e^{A(t-10)} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

*b)* Diese Linearkombinationen erhält man durch einen Basiswechsel im $\mathbb{R}^3$, der die Standardbasis ersetzt durch eine Basis aus Eigenvektoren von $A$. Eine solche Basis kennen wir aus Aufgabe 5*e)*; die entsprechenden Linearkombinationen sind also beispielsweise

$$\begin{aligned} u(t) &= x(t) - z(t) \\ v(t) &= x(t) - y(t) + z(t) \\ w(t) &= x(t) + 2y(t) + z(t)\,, \end{aligned}$$

und für diese Funktionen ist

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u(t) \\ 2v(t) \\ 8w(t) \end{pmatrix}.$$

Die Lösungen dieser drei Differentialgleichungen

$$u'(t) = -2u(t), \quad v'(t) = 2v(t) \quad \text{und} \quad w'(t) = 8w(t)$$

unter den gegebenen Anfangsbedingungen sind

$$u(t) = u_0 e^{-2(t-10)}, \quad v(t) = v_0 e^{2(t-10)} \quad \text{und} \quad w(t) = w_0 e^{8(t-t_0)}.$$

*c)* Hier muß von der Basis aus Eigenvektoren wieder zurücktransformiert werden zur Standardbasis. Da wir einfache, kleine Koeffizienten haben, löst man diese Aufgabe wohl schneller *ad hoc* als durch Matrixinversion:
$v(t)$ und $w(t)$ unterscheiden sich nur in ihrem $y$-Anteil, deshalb ist

$$y(t) = \frac{w(t) - v(t)}{3}.$$

Weiter ist $u(t) + v(t) = 2x(t) - y(t)$, also

$$x(t) = \frac{u(t) + v(t) + y(t)}{2} = \frac{u(t)}{2} + \frac{v(t)}{3} + \frac{w(t)}{6}.$$

Schließlich ist noch wegen $u(t) = x(t) - z(t)$

$$z(t) = x(t) - u(t) = -\frac{u(t)}{2} + \frac{v(t)}{3} + \frac{w(t)}{6}.$$

Dies können wir mit der Formel aus *b)* kombinieren, wobei natürlich

$$\begin{aligned} u_0 &= x_0 - z_0 \\ v_0 &= x_0 - y_0 + z_0 \\ w_0 &= x_0 + 2y_0 + z_0 \end{aligned}$$

gesetzt werden muß. Damit ist

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{x_0 - z_0}{2} e^{-2(t-10)} + \frac{x_0 - y_0 + z_0}{3} e^{2(t-10)} + \frac{x_0 + 2y_0 + z_0}{6} e^{8(t-10)} \\ y(t) &= -\frac{x_0 - y_0 + z_0}{3} e^{2(t-10)} + \frac{x_0 + 2y_0 + z_0}{3} e^{8(t-10)} \\ z(t) &= -\frac{x_0 - z_0}{2} e^{-2(t-10)} + \frac{x_0 - y_0 + z_0}{3} e^{2(t-10)} + \frac{x_0 + 2y_0 + z_0}{6} e^{8(t-10)}. \end{aligned}$$

*d)* Hier ist $u_0 = -6$ und $v_0 = w_0 = 0$, d.h.

$$\begin{aligned} x(t) &= -3e^{-2(t-10)} \\ y(t) &= 0 \\ z(t) &= 3e^{-2(t-t_0)}\,, \end{aligned}$$

die Lösung geht also (auf der zweiten Winkelhalbierenden der $(x, z)$-Ebene) gegen Null für $t \to \infty$.

*e)* Bei auch nur geringfügiger Änderung von $x_0, y_0, z_0$ werden $v_0$ und/oder $w_0$ fast immer von Null verschieden sein, so daß der Ausdruck für die Lösung nun auch Exponentialfunktionen mit *positivem* Koeffizienten im Exponenten enthält. Damit geht eine oder meist gehen sogar alle Koordinatenten der Lösungsfunktion für $t \to \infty$ gegen unendlich statt wie zuvor gegen Null; das qualitative Verhalten der Lösung hat sich also dramatisch verändert.