Vordiplomsklausur Mathematik
für Technische Informatiker

8. April 1998

Diese Klausur besteht aus drei Teilen:

- Analysis I *(25 Punkte)*
- Höhere Mathematik *(50 Punkte)*
- Numerik I *(25 Punkte)*

Für die Bewertung der Klausur ist die erreichte Gesamtpunktzahl maßgebend.

Da die drei Teile von drei verschiedenen Personen korrigiert werden, bearbeiten Sie bitte *auf jedem Bogen Papier nur Aufgaben aus einem der drei Teile.* Es ist weder notwendig noch erwünscht, daß Sie für jede *Aufgabe* ein eigenes Blatt verwenden.

Schreiben Sie bitte **unbedingt auf jedes Blatt Ihren Namen** und sorgen Sie dafür, daß bei jedem Bogen leicht erkennbar ist, zu welchem der drei Klausurteile er gehört. Falsche Zuordnung von Bögen kann die Korrektur für *alle* Teilnehmer um mehrere Tage verzögern.

Das rote Klausurpapier ist für Notizen gedacht und sollte i.a. nicht abgegeben werden. Wenn Sie in Ausnahmefällen die endgültige Form Ihrer Bearbeitung einer Aufgabe nur auf diesem Konzeptpapier haben, machen Sie dort bitte einen gut sichtbaren entsprechenden Vermerk.

Aufgaben zur Analysis I

25 Punkte

PROF. DR. SIEGFRIED BÖCHERER

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*
Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt

$$\sum_{j=1}^{n} j^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*
Untersuchen Sie die durch

$$a_n := \frac{n^3 - 14}{n^4 + 17} \qquad \text{bzw.} \qquad b_n := (-1)^n \frac{n^2 + 2}{2n^2 + 1}$$

gegebenen Folgen auf Konvergenz, Grenzwerte und Häufungspunkte.

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*
Untersuchen Sie die Konvergenz der Reihen $\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)_{n \geq 1}$ mit

$$a_j = \frac{j^2}{2^j} \qquad \text{bzw.} \qquad a_j = 2^{(-1)^j - j}$$

Aufgabe 4: *(9 Punkte)*
Zu der durch

$$x \longmapsto xe^x$$

gegebenen und auf ganz $\mathbf{R}$ definierten Funktion f gebe man die Taylorreihe zum Entwicklungspunkt $x_0 = -1$ an. Wo konvergiert diese Reihe? Stellt sie die Funktion f dar?

Steht Ihr Name auf jedem Blatt ?

Aufgaben zur Höheren Mathematik

50 Punkte

Wolfgang K. Seiler

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Die differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei Stammfunktion von sich selbst. Was können Sie über f sagen?

2) Was ist $\int_{-2}^{1} \frac{dx}{x^4}$?

3) Für die reelle $n \times n$-Matrix A sei $A^2 = A$. Was können Sie über $\det A$ sagen?

4) Richtig oder falsch: Ein Vektorfeld $\vec{V}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist genau dann zirkulationsfrei, wenn seine Jacobi-Matrix symmetrisch ist.

5) Richtig oder falsch: Falls der Fluß eines Vektorfelds durch die Oberfläche eines Volumens verschwindet, ist im Innern die Divergenz des Vektorfelds identisch Null.

Aufgabe 1: *(7 Punkte)*
Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei periodisch mit Periode 2π und für $0 \le t < 2\pi$ sei

$$f(t) = e^{2\pi - t} .$$

a) Skizzieren Sie die Funktion f für $-3\pi \le t \le 3\pi$! (*Hinweis:* $e^\pi \approx 23{,}14$ und $e^{2\pi} \approx 535{,}5$.)

b) Ist f gerade, ungerade, beides oder keins von beiden?

c) Berechnen Sie die Fourier-Reihe von f! (Es bleibt Ihnen überlassen, ob sie die Rechnung lieber in komplexer oder in reeller Form durchführen wollen, das Endergebnis sollte aber in reeller Form angegeben werden.)

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*
Berechnen Sie die Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x - y + az &= 0 \\ 3x + y - 6z &= 5 \\ -2x - 2y + 4z &= 2b \end{aligned}$$

in Abhängigkeit von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$!

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*
Die Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch die Bedingung

$$x^2 + 2y^2 = 8 .$$

a) Skizzieren Sie M !

b) Bestimmen Sie die Maxima von $f(x, y) = xy$ auf M !

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*
Sei $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le 100 \text{ und } 0 \le z \le 1\}$.

a) Beschreiben Sie die Menge V geometrisch!

b) Berechnen Sie das Volumenintegral

$$\iiint_V \cos(x^2 + y^2) \sin \pi z \, dx \, dy \, dz \, !$$

Aufgabe 5: *(9 Punkte)*

Hier geht es um die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, daß der $\mathbb{R}^3$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A hat.

b) Berechnen Sie den Rang der Matrix $A + 2E$ $\quad (E =$ Einheitsmatrix) und zeigen Sie so, daß $\lambda = -2$ Eigenwert von A ist.

c) Berechnen Sie eine Basis des zugehörigen Eigenraums!

d) Bestimmen Sie die restlichen Eigenwerte von A sowie die zugehörigen Eigenräume. (*Hinweis:* Alle Eigenwerte von A sind ganzzahlig.)

e) Geben Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ an, bezüglich derer A Diagonalgestalt hat, und bestimmen Sie diese Diagonalgestalt.

Aufgabe 6: *(8 Punkte)*

Hinweis: *Die Ergebnisse von Aufgabe 5 können auch bei der Bearbeitung dieser Aufgabe nützlich sein.*

Im $\mathbb{R}^3$ sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) + 2y(t) + 3z(t) \\ y'(t) &= 2x(t) + 6y(t) + 2z(t) \\ z'(t) &= 3x(t) + 2y(t) + z(t) \end{aligned}$$

gegeben.

a) Für eine spezielle Lösungskurve $\gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ gelte

$$x(10) = x_0, \quad y(10) = y_0 \quad \text{und} \quad z(10) = z_0 .$$

Geben Sie mit Hilfe einer Matrixexponentialfunktion eine Formel für $\gamma(t)$ an! (Die Matrixexponentialfunktion soll dabei noch *nicht* weiter ausgerechnet werden.)

b) Finden Sie Linearkombinationen $u(t), v(t), w(t)$ der Funktionen $x(t), y(t), z(t)$, die Differentialgleichungen der Form

$$u'(t) = au(t), \quad v'(t) = bv(t) \quad \text{und} \quad w'(t) = cw(t)$$

genügen, und geben Sie deren Lösungsfunktionen $u(t), v(t), w(t)$ für das Anfangswertproblem

$$u(10) = u_0, \quad v(10) = v_0 \quad \text{und} \quad w(10) = w_0$$

explizit an!

c) Stellen Sie $x(t), y(t), z(t)$ als Linearkombinationen der Funktionen $u(t), v(t), w(t)$ dar, und geben Sie dann auch für das in *a)* gestellte Anfangswertproblem die Lösungsfunktionen $x(t), y(t), z(t)$ explizit an!

d) Speziell sei $x_0 = -3, y_0 = 0$ und $z_0 = 3$. Welche Funktionen liefern Ihre Formeln hierfür?

e) Nun werde das Problem aus *d)* leicht variiert, indem x_0, y_0, z_0 alle drei um 0,001 verändert werden. Ändert sich dadurch etwas am qualitativen Verhalten der Lösungen?

Steht Ihr Name auf jedem Blatt ?