WOLFGANG K. SEILER
Tel. 5385

A5, C 201

13. Februar 1998

Klausur und 17. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Lösungsvorschläge

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ habe ihr einziges Maximum im Punkt $(0,0,0)$. Bestimmen Sie die sämtlichen Maxima der Funktion $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$; $(x,y,z) \mapsto f\big(x^2 - z^2, x-1, y\big)$!

$g(x,y,z) = f(x^2 - z^2, x-1, y)$ ist genau dann maximal, wenn f an der Stelle $(0,0,0)$ ausgewertet wird, d.h. $x = \pm z$, $x = 1$ und $y = 0$ ist. Der Maximalwert $f(0,0,0)$ wird also genau in den beiden Punkten $(1,0,1)$ und $(1,0,-1)$ angenommen.

2) Richtig oder falsch: Jede negativ definite symmetrische $n \times n$-Matrix ist invertierbar.

Richtig: Eine symmetrische Matrix hat bezüglich einer geeigneten Basis Diagonalform mit den Eigenwerten als Einträgen; sie ist genau dann negativ definit, wenn diese Einträge negativ und somit insbesondere ungleich Null sind. Also existiert die inverse Matrix.

3) Richtig oder falsch: Für ein wirbelfreies Feld ist jedes Kurvenintegral entlang der Seiten eines Quadrats null.

Richtig, denn nach Definition verschwindet das Integral längs *jeder* geschlossenen Kurve.

4) Richtig oder falsch: Ist für ein Vektorfeld $\vec{V}$ auf $D \subset \mathbb{R}^3$ die Rotation $\operatorname{rot} V$ überall gleich dem Nullvektor, so ist $\vec{V}$ wirbelfrei.

Falsch: Das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters ist ein Gegenbeispiel.

5) Richtig oder falsch: Falls der Fluß des Vektorfelds $\vec{V}$ durch jede Kugeloberfläche verschwindet, ist $\operatorname{div} \vec{V} = 0$.

Richtig nach dem Satz von GAUSS und der daraus folgenden Integraldarstellung der Divergenz.

6) Richtig oder falsch: Die Funktion $z \mapsto |z|$ ist komplex differenzierbar.

Falsch, denn sonst wäre auch $z \mapsto \overline{z} = |z|^2/z$ für $z \neq 0$ komplex differenzierbar.

7) Richtig oder falsch: Die Differentialgleichung $2\dot{y}(t)y(t) = 1$ mit Anfangsbedingung $y(0) = 0$ hat die eindeutig bestimmte Lösung $y(t) = \sqrt{t}$.
Falsch, denn $y(t) = -\sqrt{t}$ ist eine weitere Lösung.

Bearbeiten Sie bitte jede der folgenden Aufgaben auf einem eigenen Blatt, da die verschiedenen Aufgaben von verschiedenen Personen korrigiert werden.
• • • Schreiben Sie unbedingt auf jedes Blatt Ihren Namen! • • •

Da ich ohnehin keinen Schein bekomme, muß ich mich nicht daran halten.

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*
Zeigen Sie: Für zwei differenzierbare Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt

$$\operatorname{grad}(f \cdot g) = g \operatorname{grad} f + f \operatorname{grad} g \,!$$

Nach der LEIBNIZ-Regel oder Produktregel (*nicht,* wie einige geschrieben haben, Kettenregel) ist

$$\operatorname{grad}(f\cdot g) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(fg)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(fg)}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g\frac{\partial f}{\partial x_1} + f\frac{\partial g}{\partial x_1} \\ \vdots \\ g\frac{\partial f}{\partial x_n} + f\frac{\partial g}{\partial x_n} \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_n} \end{pmatrix} = g \operatorname{grad} f + f \operatorname{grad} g\,.$$

Aufgabe 2: (*5 Punkte*)
Bestimmen Sie das TAYLOR-Polynom vom Grad fünf für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad (x,y) \mapsto \sin(x^2+y^2)$$

um den Punkt $(0,1)$!
Angesichts der kombinatorischen Explosion der Terme mit der Ordnung ist es sicherlich keine attraktive Idee, stur nach der TAYLORschen Formel vorzugehen; man sollte also nach Alternativen suchen. Hier gibt es, wie meistens bei solchen Problemen, mehrere Möglichkeiten; da TAYLOR-Entwicklungen für Funktionen einer Veränderlichen relativ unproblematisch sind, liegt beispielsweise der Gedanke nahe, daß man das Problem auf Probleme mit einer Veränderlichen reduzieren sollte.
Nach der Additionsformel für den Sinus ist

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta\,,$$

also

$$\sin(x^2+y^2) = \sin x^2\,\cos y^2 + \cos x^2\,\sin y^2\,.$$

Die TAYLOR-Entwicklungen um $x=0$ sind (hoffentlich) wohlbekannt:

$$\sin x^2 = x^2 + O(x^6) \quad \text{und} \quad \cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2} + O(x^8)\,.$$

Um $y=1$ ist nach TAYLOR

$$\sin(1+h) = \sin 1 + \cos 1\cdot h - \sin 1\frac{h^2}{2} - \cos 1\frac{h^3}{6} + \sin 1\frac{h^4}{24} + \cos 1\frac{h^5}{120} + O(h^6)$$

und

$$\cos(1+h) = \cos 1 - \sin 1\cdot h - \cos 1\frac{h^2}{2} + \sin 1\frac{h^3}{6} + \cos 1\frac{h^4}{24} - \sin 1\frac{h^5}{120} + O(h^6)\,.$$

Also ist

$$\begin{aligned} \sin\big((1+u)^2\big) &= \sin(1+2u+u^2) = \sin 1 + \cos 1\cdot(2u+u^2) - \sin 1\frac{(2u+u^2)^2}{2} \\ &\quad - \cos 1\frac{(2u+u^2)^3}{6} + \sin 1\frac{(2u+u^2)^4}{24} + \cos 1\frac{(2u+u^2)^5}{120} + O(u^6) \\ &= \sin 1 + 2\cos 1\,u + (-2\sin 1 + \cos 1)\,u^2 + (-4/3\cos 1 - 2\sin 1)\,u^3 \\ &\quad + (-2\cos 1 + 1/6\sin 1)\,u^4 + \left(4/3\sin 1 - \frac{11}{15}\cos 1\right)u^5 + O\left(u^6\right) \end{aligned}$$

und entsprechend

$$\begin{aligned} \cos\big((1+u)^2\big) &= \cos 1 - 2\sin 1\,u + (-2\cos 1 - \sin 1)\,u^2 + (4/3\sin 1 - 2\cos 1)\,u^3 \\ &\quad + (2\sin 1 + 1/6\cos 1)\,u^4 + \left(4/3\cos 1 + \frac{11}{15}\sin 1\right)u^5 + O\left(u^6\right)\,. \end{aligned}$$

Ausmultipliziert ergibt dies die gewünschte TAYLOR-Entwicklung

$$\begin{aligned}\sin\left(x^2+(1+u)^2\right) &= \sin 1 + 2\cos 1\,u + \cos 1\,x^2 + (-2\sin 1 + \cos 1)\,u^2 - 2\sin 1\,ux^2\\ &+ (-4/3\cos 1 - 2\sin 1)\,u^3 - 1/2\sin 1\,x^4 + (-2\cos 1 - \sin 1)\,u^2x^2\\ &+ (-2\cos 1 + 1/6\sin 1)\,u^4 - \cos 1\,ux^4 + (4/3\sin 1 - 2\cos 1)\,u^3x^2\\ &+ \left(4/3\sin(1) - \frac{11}{15}\cos 1\right)u^5 + \cdots\ .\end{aligned}$$

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*

Ein Produkt werde unter Benutzung von zwei Ausgangsstoffen hergestellt, die 100 DM *bzw.* 800 DM pro Tonne kosten. Aus x Tonnen des ersten und y Tonnen des zweiten Stoffes lassen sich in z Stunden Arbeit $50x^{2/5}y^{1/5}z^{1/5}$ Stück des Produkts fertigen; dabei kostet eine Arbeitsstunde 120 DM. Welche Stückzahl kann für 240 000 DM maximal hergestellt werden?

In Mathematik übersetzt besteht das Problem also darin, daß zunächst die Funktion

$$f(x,y,z) = 50x^{2/5}y^{1/5}z^{1/5}$$

unter der Nebenbedingung

$$100x + 800y + 120z \le 240\,000$$

maximiert werden muß. Da f in jeder der drei Variablen x, y, z monoton wächst, muß diese Summe im Maximum tatsächlich gleich 240 000 sein, die Nebenbedingung kann also auch geschrieben werden als

$$g(x,y,z) = 100x + 800y + 120z - 240\,000 = 0\,.$$

Außerdem nimmt f auch unter der ursprünglichen Nebenbedingung positive Werte an; daher ist im Maxiumum keine der drei Variablen gleich null.

In jedem Extremum von f unter dieser Nebenbedingung sind die Gradienten von f und g linear abhängig; da $\operatorname{grad} g$ als konstanter Vektor nirgends verschwindet, muß es also eine Beziehung der Form

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \lambda \operatorname{grad} g(x,y,z) \quad \text{mit einem} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

geben. Ausgeschrieben und nach Komponenten getrennt wird diese Bedingung zu

$$\begin{aligned}20x^{-3/5}y^{1/5}z^{1/5} &= 100\,\lambda\\ 10x^{2/5}y^{-4/5}z^{1/5} &= 800\,\lambda\\ 10x^{2/5}y^{1/5}z^{-4/5} &= 120\,\lambda\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}x^{-3/5}y^{1/5}z^{1/5}/5 &= \lambda\\ x^{2/5}y^{-4/5}z^{1/5}/80 &= \lambda\\ x^{2/5}y^{1/5}z^{-4/5}/12 &= \lambda\,.\end{aligned}$$

Gleichsetzen der letzten beiden linken Seiten ergibt

$$x^{2/5}y^{-4/5}z^{1/5}/80 = x^{2/5}y^{1/5}z^{-4/5}/12$$

oder

$$\frac{z}{80} = \frac{y}{12}\,, \text{ d.h.} \quad z = \frac{20y}{3}\,.$$

Entsprechend ergibt Gleichsetzen der oberen beiden linken Seiten

$$x^{-3/5}y^{1/5}z^{1/5}/5 = x^{2/5}y^{-4/5}z^{1/5}/80$$

oder

$$16y = x\,.$$

Die Nebenbedingung wird somit zu

$$100 \cdot 16y + 800y + 120 \cdot \frac{20}{3}y = 240\,000\,,$$

d.h. $3200y = 240\,000$ und damit

$$y = 75, \quad x = 1200 \quad \text{und} \quad z = 500\,.$$

Der maximale Wert, den f unter der Nebenbedingung $g = 0$ annehmen kann ist daher

$$f(1200, 75, 500) = 50 \cdot \sqrt[5]{1200^2 \cdot 75 \cdot 500} \approx 7005{,}7\,,$$

d.h. maximal können 7005 Stück produziert werden.

Aufgabe 4: *(9 Punkte)*
Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec V\colon D \underset{\text{def}}{=} \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 \le 4\right\} \to \mathbb{R}^3; \quad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 - x^2 - y^2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $\operatorname{div} \vec V$ und $\operatorname{rot} \vec V$ sowie, falls möglich, eine Funktion φ derart, daß $\vec V = \operatorname{grad} \varphi$ ist!

$$\operatorname{div} \vec V = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} = 0$$

und

$$\operatorname{rot} \vec V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} \\ \frac{\partial V_1}{\partial 3} - \frac{\partial V_3}{\partial x} \\ \frac{\partial V_2}{\partial 1} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist $\operatorname{rot} \vec V$ außerhalb der z-Achse von Null verschieden; damit kann $\vec V$ kein Gradientenfeld sein, denn $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi \equiv \vec 0$.

b) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma \vec V\, ds$ für die Kurve

$$\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3; \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ \sin t \end{pmatrix}$$

sowohl direkt als auch nach dem Satz von STOKES!

$$\begin{aligned} \int_\gamma \vec V\, ds &= \int_0^{2\pi} \vec V(\cos t, 0, \sin t) \cdot \dot\gamma(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 - \cos^2 t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ 0 \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(4\cos t - \cos^3 t\right) dt = 0\,; \end{aligned}$$

denn alle ungeraden Potenzen von Sinus oder Cosinus haben Periodenmittelwert null.
Der Satz von STOKES besagt, daß $\int_\gamma \vec V\, ds = \iint_B \operatorname{rot} \vec V\, d\vec O$ ist für jede Oberfläche B mit Randkurve γ. Eine einfache solche Fläche ist die Kreisscheibe um den Nullpunkt, deren Rand γ ist. Ihr Normaleneinheitsvektor ist nach der Dreifingerregel der negative Einheitsvektor der y-Achse; dessen Skalarprodukt mit $\operatorname{rot} \vec V$ ist $2x$. Also muß diese Funktion über

die Kreisscheibe integriert werden. Die Kreisscheibe liegt nullpunktssymmetrisch in der (x, z)-Ebenen, so daß auch dieses Integral aus Symmetriegründen verschwindet, in völliger Übereinstimmung mit dem Satz von STOKES.

Aufgabe 5: *(9 Punkte)*
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\iint_B \cos(2x+3y)\,dx\,dy \quad$ für $\quad B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le \pi/4,\ \ 0\le y\le \pi/12\}$

$$\begin{aligned}\iint_B \cos(2x+3y)\,dx\,dy &= \int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{\pi/12}\cos(2x+3y)\,dy\right)dx\\ &= \int_0^{\pi/4}\frac{1}{3}\Big(\sin(2x+\pi/4)-\sin 2x\Big)\,dx\\ &= -\frac{1}{6}\Big(\cos(\pi/2+\pi/4)-\cos(\pi/2)-\cos(\pi/4)+\cos 0\Big)\\ &= -\frac{1}{6}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}-0-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right) = \frac{\sqrt{2}-1}{6}\,.\end{aligned}$$

b) $\iint_B \cos\pi(x^2+y^2)\,dx\,dy \quad$ für $\quad B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\}$
Hier bietet sich natürlich die Berechnung in Polarkoordinaten an. Das Flächenelement ist dann bekanntlich $r\,dr\,d\varphi$ und

$$\begin{aligned}\iint_B \cos\pi(x^2+y^2)\,dx\,dy &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\cos(\pi r^2)\,r\,dr\right)d\varphi\\ &= 2\pi\int_0^1 r\cos(\pi r^2)\,dr = \sin\pi r^2\,\Big|_0^1 = 0\,.\end{aligned}$$

c) $\iint_B x^2\,dx\,dy \quad$ für $\quad B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\}$
Auch hier bieten sich Polarkoordinaten an, denn der Cosinus ist etwas angenehmer im Umgang als eine Funktion wie $\sqrt{1-x^2}$.

$$\begin{aligned}\iint_B x^2\,dx\,dy &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 r^2\cos^2(\varphi)\,r\,dr\right)d\varphi = \int_0^{2\pi}\cos^2(\varphi)\left(\int_0^1 r^3\,dr\right)d\varphi = \int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\cos^2\varphi\,d\varphi\\ &= \frac{1}{8}(\varphi+\sin\varphi\cdot\cos\varphi)\,\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 6: *(8 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}\cup\{\infty\};\quad z\mapsto \frac{e^z-z}{z^2}$$

meromorph ist!
Da die Exponentialfunktion und die Identität beide komplex differenzierbar sind, gilt das gleiche auch für $z^2 f(z) = e^z - z$; also ist f meromorph, denn $z=0$ ist die einzige Polstelle von f.

b) Bestimmen Sie die LAURENT-Reihe von f um $z=0$!

$$e^z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\Longrightarrow e^z-z=1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\Longrightarrow f(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{z^{k-2}}{k!}\,.$$

c) Bestimmen Sie das Residuum von f im Punkt $z=0$!
Da in der LAURENT-Reihe von f um $z=0$ kein Term mit z^{-1} auftaucht, ist das Residuum null.

d) Berechnen Sie $\int_\gamma f(z)\,dz$, wobei γ den Einheitskreis einmal im Gegenuhrzeigersinn durchläuft!
Da das Residuum im Nullpunkt verschwindet und es sonst keine weiteren Polstellen gibt, verschwindet dieses Integral nach dem Residuensatz.

Aufgabe 7: (*7 Punkte)*
Bestimmen Sie alle Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\dot{y}(t)=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}y(t)$$

auf $\mathbb{R}^2$!
Die Matrix $\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}$ hat die beiden verschiedenen Eigenwerte -2 und -3; daher ist sowohl $y_1(t)$ als auch $y_2(t)$ als Linearkombination

$$C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t}$$

darstellbar. Zur genaueren Bestimmung der Koeffizienten kann man entweder die Eigenvektoren der Matrix bestimmen (es sind $\binom{0}{1}$ und $\binom{1}{-1}$) und die Matrix $\begin{pmatrix}e^{-2t} & 0\\ 0 & e^{-3t}\end{pmatrix}$ aus dieser Basis in die Standardbasis transformieren oder, einfacher, sich die Differentialgleichung genauer anschauen:
Ausgeschrieben hat das Gleichungssystem die Form

$$\begin{aligned}\dot{y}_1(t)&=-2y_1(t)+\ y_2(t)\\ \dot{y}_2(t)&=\qquad\qquad\ -3y_2(t)\,,\end{aligned}$$

Also ist $y_2(t)=y_0e^{-3t}$ mit $y_2(0)=c_2$.
Addiert man die erste Gleichung zur zweiten, so folgt, daß $z(t)=y_1(t)+y_2(t)$ die Differentialgleichung $\dot{z}(t)=-2z(t)$ erfüllt, d.h. $z(t)=z_0e^{-2t}$ mit $z_0=x_0+y_0$, wobei $y_1(0)=x_0$ sein soll. Also ist $y_1(t)=z(t)-y_2(t)=(x_0+y_0)e^{-2t}+y_0e^{-3t}$.

Aufgabe 8: (*5 Punkte)*
Zeigen Sie: Falls es zu einer Funktion $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine Konstante M gibt, so daß für alle $t\geq 0$ gilt $|f(t)|\leq Me^t$, existiert die LAPLACE-Transformierte

$$\mathfrak{L}(f)(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\,.$$

Aus $|f(t)|\leq Me^t$ folgt, daß $|f(t)e^{st}|\leq Me^t\,|e^{-st}|=Me^{(1-\mathfrak{Re}\,s)t}$ ist. Für $\mathfrak{Re}\,s>1$ gibt es also ein $\alpha>0$, so daß $|f(t)e^{st}|\leq Me^{-\alpha t}$ ist. Da

$$\int_0^b Me^{-\alpha t}\,dt=\frac{M}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha b}\right)$$

für $b\to\infty$ konvergiert, ist auch $\mathfrak{L}(f)(s)$ absolut konvergent und damit erst recht konvergent für $\mathfrak{Re}\,s>1$.