WOLFGANG K. SEILER
Tel. 5385

A5, C201

27. November 1997

7. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Ist $\operatorname{div} f = 0$, ist die JACOBI-Matrix antisymmetrisch.

2) Richtig oder falsch: Ist $\operatorname{rot} f = \vec{0}$, ist die JACOBI-Matrix symmetrisch.

3) Richtig oder falsch: Im Punkt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ steht $\operatorname{rot} f(x, y, z)$ senkrecht auf dem Ortsvektor ${}^t(x, y, z)$.

4) Richtig oder falsch: Im Punkt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ steht $\operatorname{rot} f(x, y, z)$ senkrecht auf $f(x, y, z)$.

5) Berechnen Sie den antisymmetrischen Anteil der JACOBI-Matrix von $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$!

Aufgabe 1: (*5 Punkte)*
Zeigen Sie: Für eine Funktion $f \in \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R})$ und ein Vektorfeld $V \in \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R}^3)$ auf der offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^3$ gilt:

a) $\operatorname{div}(fV) = (\operatorname{grad} f) \cdot V + f \operatorname{div} V$

b) $\operatorname{rot}(fV) = (\operatorname{grad} f) \times V + f \operatorname{rot} V$

c) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} V) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} V) - {}^t(\Delta V, \Delta V, \Delta V)$

Aufgabe 2: (*4 Punkte)*

a) Berechnen Sie für zwei Vektorfelder $V, W \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ die Divergenz von $V \times W$ auf möglichst kompakte Weise!

b) Das Spatprodukt $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ dreier Vektoren ist bekanntlich bis auf das Vorzeichen unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren; insbesondere ist

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) .$$

Wenden Sie dies an auf die „Vektoren“ $\vec{a} = \nabla, \vec{b} = V$ und $\vec{c} = W$ und vergleichen Sie mit *a)*!

Aufgabe 3: (*6 Punkte)*
Das Potential eines (statischen) elektrischen Dipols mit Dipolmoment $\vec{p}$ ist gegeben durch

$$U(x, y, z) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{x}|^3}, \quad \text{wobei} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie sein elektrisches Feld $E = -\operatorname{grad} U$!

b) Berechnen Sie Divergenz und Rotation dieses Feldes!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 4. Dezember 1997 um 12.00 Uhr