WOLFGANG K. SEILER
Tel. 5385

A5, C201

20. November 1997

6. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Falls $\operatorname{grad} f(x_0, y_0) \neq 0$ ist, läßt sich die Gleichung $f(x, y) = 0$ in einer Umgebung von (x_0, y_0) nach y auflösen.

2) Richtig oder falsch: In jedem (lokalen) Extremum (x_0, y_0) der Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) \underset{\text{def}}{=} x^2 + y^2 \leq 100$ sind $\operatorname{grad} f(x_0, y_0)$ und $\operatorname{grad} g(x_0, y_0)$ linear abhängig.

3) Charakterisieren Sie jene Punkte des $\mathbb{R}^3$, in denen $f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2$ ein Minimum unter der Nebenbedingung $5x + 6y + 7z = 10$ annimmt, geometrisch!

4) Richtig oder falsch: Für die Funktion $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ sei die JACOBI-Matrix identisch Null. Dann gibt es einen Punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$, so daß $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

5) Richtig oder falsch: Falls alle zweiten partiellen Ableitungen von $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ existieren und stetig sind, ist die JACOBI-Matrix symmetrisch.

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*
Zeigen Sie: Die Funktion $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ habe im Punkt (x_0, y_0, z_0) ein Minimum unter den Nebenbedinungen $g(x, y, z) = h(x, y, z) = 0$. Dann sind dort die Gradienten von f, g und h linear abhängig.

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*
Ein Produkt werde aus drei Resourcen hergestellt, die jeweils 80 DM, 12 DM *bzw.* 10 DM pro Einheit kosten. Aus x Einheiten der ersten, y Einheiten der zweiten und z Einheiten der dritten lassen sich $50x^{2/5}y^{1/5}z^{1/5}$ Einheiten des Produkts fertigen. Wie viele Einheiten können für 24 000 DM maximal gefertigt werden?

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*
Die Quadrik $Q \subset \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch die Gleichung

$$(x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 ,$$

wobei die Determinante der symmetrischen 2×2-Matrix A von Null verschieden sei. Bestimmen Sie jene Punkte der Quadrik, in denen der Abstand zum Punkt $(0, 0)$ ein relatives Minimum annimmt! Lassen sich diese Punkte auch geometrisch interpretieren?

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 27. November 1997 um 12.00 Uhr