WOLFGANG K. SEILER
Tel. 5385

A5, C201

13. Februar 1998

Klausur und 17. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ habe ihr einziges Maximum im Punkt $(0,0,0)$. Bestimmen Sie die sämtlichen Maxima der Funktion $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R};\quad (x,y,z) \mapsto f\big(x^2 - z^2, x-1, y\big)$!

2) Richtig oder falsch: Jede negativ definite symmetrische $n \times n$-Matrix ist invertierbar.

3) Richtig oder falsch: Für ein wirbelfreies Feld ist jedes Kurvenintegral entlang der Seiten eines Quadrats null.

4) Richtig oder falsch: Ist für ein Vektorfeld $\vec{V}$ auf $D \subset \mathbb{R}^3$ die Rotation $\operatorname{rot} V$ überall gleich dem Nullvektor, so ist $\vec{V}$ wirbelfrei.

5) Richtig oder falsch: Falls der Fluß des Vektorfelds $\vec{V}$ durch jede Kugeloberfläche verschwindet, ist $\operatorname{div} \vec{V} = 0$.

6) Richtig oder falsch: Die Funktion $z \mapsto |z|$ ist komplex differenzierbar.

7) Richtig oder falsch: Die Differentialgleichung $2\dot{y}(t)y(t) = 1$ mit Anfangsbedingung $y(0) = 0$ hat die eindeutig bestimmte Lösung $y(t) = \sqrt{t}$.

Bearbeiten Sie bitte jede der folgenden Aufgaben auf einem eigenen Blatt, da die verschiedenen Aufgaben von verschiedenen Personen korrigiert werden.
• • • Schreiben Sie unbedingt auf jedes Blatt Ihren Namen! • • •

Aufgabe 1: (*4 Punkte)*
Zeigen Sie: Für zwei differenzierbare Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt

$$\operatorname{grad}(f \cdot g) = g \operatorname{grad} f + f \operatorname{grad} g\,!$$

Aufgabe 2: (*5 Punkte)*
Bestimmen Sie das TAYLOR-Polynom vom Grad fünf für die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\quad (x,y) \mapsto \sin(x^2 + y^2)$$

um den Punkt $(0,1)$!

Aufgabe 3: (*6 Punkte)*
Ein Produkt werde unter Benutzung von zwei Ausgangsstoffen hergestellt, die 100 DM *bzw.* 800 DM pro Tonne kosten. Aus x Tonnen des ersten und y Tonnen des zweiten Stoffes lassen sich in z Stunden Arbeit $50x^{2/5}y^{1/5}z^{1/5}$ Stück des Produkts fertigen; dabei kostet eine Arbeitsstunde 120 DM. Welche Stückzahl kann für 240 000 DM maximal hergestellt werden?

• • • **B I T T E W E N D E N !** • • •

Aufgabe 4: *(9 Punkte)*
Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{V}\colon D \underset{\text{def}}{=} \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2 \le 4\right\} \to \mathbb{R}^3; \quad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4-x^2-y^2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie div $\vec{V}$ und rot $\vec{V}$ sowie, falls möglich, eine Funktion φ derart, daß $\vec{V} = \operatorname{grad}\varphi$ ist!

b) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma \vec{V}\,ds$ für die Kurve

$$\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3; \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ \sin t \end{pmatrix}$$

sowohl direkt als auch nach dem Satz von Stokes!

Aufgabe 5: *(9 Punkte)*
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\iint_B \cos(2x+3y)\,dx\,dy \quad \text{für} \quad B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x \le \pi/4,\;\; 0 \le y \le \pi/12\right\}$

b) $\displaystyle\iint_B \cos\bigl(\pi(x^2+y^2)\bigr)\,dx\,dy \quad \text{für} \quad B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 \le 1\right\}$

c) $\displaystyle\iint_B x^2\,dx\,dy \quad \text{für} \quad B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 \le 1\right\}$

Aufgabe 6: *(8 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}; \quad z \mapsto \frac{e^z - z}{z^2}$$

meromorph ist!

b) Bestimmen Sie die Laurent-Reihe von f um $z = 0$!

c) Bestimmen Sie das Residuum von f im Punkt $z = 0$!

d) Berechnen Sie $\int_\gamma f(z)\,dz$, wobei γ den Einheitskreis einmal im Gegenuhrzeigersinn durchläuft!

Aufgabe 7: *(7 Punkte)*
Bestimmen Sie alle Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\dot{y}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} y(t)$$

auf $\mathbb{R}^2$!

Aufgabe 8: *(5 Punkte)*
Zeigen Sie: Falls es zu einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Konstante M gibt, so daß für alle $t \ge 0$ gilt $|f(t)| \le Me^t$, existiert für s mit hinreichend großem Realteil die Laplace-Transformierte

$$\mathfrak{L}(f)(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt.$$

Abgabe bis zum Freitag, dem 13. Februar 1998 um 18.00 Uhr