Wolfgang K. Seiler A5, C201
Tel. 5385

5. Februar 1998

15. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Für eine $n \times n$-Matrix A gilt: $\det e^A = e^{\det A}$.

2) Richtig oder falsch: $\left(e^{\frac{1}{r}A}\right)^r = e^A$.

3) Finden Sie eine $n \times n$-Matrix A, so daß $e^A = -E$ die negative Einheitsmatrix ist!

4) Richtig oder falsch: e^A und $e^{(A^2)}$ kommutieren.

5) Richtig oder falsch: Die Eigenwerte der reellen 2×2-Matrix A seien rein imaginär. Dann hat die Differentialgleichung $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$ nur periodische Lösungen.

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*
Für eine $n \times n$-Matrix A sei $\sin A = \frac{1}{2i}(e^{iA} - e^{-iA})$ und $\cos A = \frac{1}{2}(e^{iA} + e^{-iA})$.

a) Zeigen Sie: $\sin^2 A + \cos^2 A = E$

b) Finden Sie eine Matrix $P \neq 0$, so daß für alle $n \times n$-Matrizen A und alle $r \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\sin(A + rP) = \sin A \text{ und } \cos(A + rP) = \cos A\,.$$

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*
Bestimmen Sie alle Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, die der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= \cos\varphi \cdot y_1(t) + \sin\varphi \cdot y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) &= -\sin\varphi \cdot y_1(t) + \cos\varphi \cdot y_2(t) \end{aligned}$$

genügen!

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*
Ein Stromkreis enthalte eine Spannungsquelle, einen Widerstand und eine Induktivität; dann ist bekanntlich

$$L\dot{I}(t) + RI(t) = U(t)\,.$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei $I(0) = I_0$. Bestimmen Sie $I(t)$

a) für $U(t) \equiv 0$

b) für eine Gleichspannung $U(t) = U_0$, indem Sie zunächst (natürlich ohne Beachtung der Anfangsbedingung) nach einem in diesem Stromkreis möglichen Gleichstrom suchen

c) für eine Wechselspannung $U(t) = U_0 \cos \omega t$, indem sie zunächst nach einem in diesem Stromkreis möglichen Wechselstrom der Kreisfrequenz ω suchen.

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 12. Februar 1998 um 12.00 Uhr