Wolfgang K. Seiler — A5, C201
Tel. 5385

22. Januar 1998

13. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Die Oberfläche eines Torus ist orientierbar.
2) Richtig oder falsch: Die Oberfläche eines Torus ist einfach zusammenhängend.
3) Richtig oder falsch: $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|+|y|\geq 1\}$ ist einfach zusammenhängend.
4) Richtig oder falsch: $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|+|y|\geq 1\}$ ist orientierbar.
5) Richtig oder falsch: Das Möbiusband ist einfach zusammenhängend.

Aufgabe 1: (*4 Punkte)*
$B\subset\mathbb{R}^2$ sei beschränkt mit Flächeninhalt F und habe eine stückweise reguläre Kurve γ als Rand.

a) Berechen Sie $\int_\gamma \binom{ax+by}{cx+dy}\,ds$ nach dem Satz von Green!
b) Geben Sie ein Vektorfeld $\vec{V}$ an, so daß $\int_\gamma \vec{V}\,ds$ gleich dem Flächeninhalt von B ist!

Aufgabe 2: (*6 Punkte)*
Das Möbiusband kann als Flächenstück B dargestellt werden mit der Funktion

$$f\colon D=[0,1]\times[0,2\pi)\to\mathbb{R}^3;\quad (u,v)\mapsto\begin{pmatrix}(2+u\cos v)\,\cos 2v\\(2+u\cos v)\,\sin 2v\\u\sin v\end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Randkurve γ von B !
b) Berechen Sie für $\vec{V}(x,y,z)=\frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}$ das Integral $\int_\gamma \vec{V}\,ds$!
c) Berechnen Sie $\iint_B \operatorname{rot}\vec{V}\,d\vec{O}=\iint_D \operatorname{rot}\vec{V}\cdot(f_u\times f_v)\,du\,dv$!
d) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus *b)* und *c)* mit der Aussage des Satzes von Stokes!

Aufgabe 3: (*5 Punkte)*
$B\subset\mathbb{R}^3$ sei beschränkt und habe einen Rand F aus regulären Flächenstücken. Weiter sei $U\supset B$ eine offene Menge und $f\colon U\to\mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Wir definieren die Normalenableitung von f entlang F als

$$f_n\colon B\to\mathbb{R};\quad \mathbf{x}\mapsto\lim_{h\to 0}\frac{f(\mathbf{x}+h\vec{n})-f(\mathbf{x})}{h},$$

wobei $\vec{n}$ der nach außen gerichtete Normaleneinheitsvektor an F in $\mathbf{x}$ sei. Zeigen Sie:

$$\iiint_B \Delta f\,dx\,dy\,dz=\iint_F f_n\,d\vec{O}\,!$$

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 29. Januar 1998 um 12.00 Uhr