Wolfgang K. Seiler
Tel. 5385

A5, C201

18. Dezember 1997

10. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Ein Teilchen komme aus unendlicher Ferne entlang einer Kurve γ in die Nähe einer Punktladung, werde durch deren Feld $\vec{E}$ abgelenkt und verschwinde wieder in unendliche Weiten. Dann ist $\int_\gamma \vec{E}\,ds = 0$.

2) Richtig oder falsch: Ist ein Feld $\vec{V}$ nicht wirbelfrei, so gibt es geschlossene Kurven, entlang derer das Kurvenintegral über $\vec{V}$ ungleich null ist.

3) Richtig oder falsch: Für ein wirbelfreies Feld ist jedes Kurvenintegral entlang der im Uhrzeigersinn orientierten vier Seiten eines Quadrats null.

4) Welche Fläche hat die Ellipse $ax^2 + by^2 \le 1$?

5) Richtig oder falsch: Das Volumen der Kugeloberfläche im $\mathbb{R}^3$ ist Null.

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

a) Berechnen Sie den Gradienten der Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\};\quad \mathbf{x} \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n x_i^2}}$!

b) Ist das so berechnete Feld quellenfrei?

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

Mit $r(\mathbf{x}) = \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}$ sei auf $\mathbb{R}^4 \setminus \{(0,0,0,0)\}$ das Vektorfeld $\vec{V}$ erklärt durch $\vec{V}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{r^n}$.

a) Für welche $n \ge 1$ ist dies ein Potentialfeld?

b) Geben Sie für diese n ein Potential für $\vec{V}$ an!

c) Die Kurve γ verbinde den Punkt $(3,3,3,-3)$ auf gerader Linie mit $(-3,3,3,3)$. Berechnen Sie, sofern es existiert, das Integral $\int_\gamma \vec{V}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$.

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

Bestimmen Sie für den Bereich $B \underset{\text{def}}{=} \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + 4y^2 \le 1\right\}$ die folgenden Integrale:

a) $\iint\limits_B x\,dx\,dy$ *b)* $\iint\limits_B xy\,dx\,dy$ *c)* $\iint\limits_B \sqrt{1 - x^2 - 4y^2}\,dx\,dy$ *d)* $\iint\limits_B \sqrt{x^2 + 4y^2}\,dx\,dy$

Frohe Weihnachten und Alles Gute im Neuen Jahr!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 8. Januar 1998 um 12.00 Uhr