NUMERIK I (25 Punkte)

Professor Dr. G. Nürnberger

Aufgabe Nr.1 (9 Punkte) : Zeigen Sie, daß die Folge (x_n), definiert durch

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+x_n},\ n \in I\!N \cup \{0\},$$

für jeden Startwert $x_0 \in [\frac{1}{8}, 2]$ konvergiert. Bestimmen Sie den zugehörigen Grenzwert.
HINWEIS: Verwenden Sie den Banachschen Fixpunktsatz.

Aufgabe Nr.2 (8 Punkte) : Es sei $f(x) = \sqrt{1+x}, x \in [-1, 1]$. Geben Sie die Newtonsche Interpolationsformel für das Polynom $p \in \Pi_3$ mit

$$p(-1) = f(-1),\ p(0) = f(0),\ p(1) = f(1) \ \text{ und } \ p'(1) = f'(1)$$

an und berechnen Sie die dabei auftretenden dividierten Differenzen.

Aufgabe Nr.3 (8 Punkte) : Bestimmen Sie die Quadraturformel

$$Q(f) = a_0 f(0) + a_1 f(\tfrac{\pi}{2}) + a_2 f(\pi),\ f \in C[0, \pi],$$

welche exakt für den Raum $G = span\{1, \sin(x), \cos(\frac{1}{2}x)\}$ ist.