2. Die Einschränkung
$$f_{M\setminus D}\colon M\setminus D\to\mathbb{C};\qquad z\mapsto f(z)$$
ist holomorph.
3. Zu jedem Punkt $w\in M$ gibt es eine natürliche Zahl m, so daß $g(z)=(z-w)^n f(z)$ in einer Umgebung von w holomorph ist.

Die Punkte $w\in M$ heißen *Polstellen* von f; die kleinste Zahl $n\in\mathbb{N}$, für die *3.* gilt, heißt *Ordnung* der Polstelle w.

Es ist klar, daß die beiden Eingangsbeispiele meromorph sind im Sinne dieser Definitition: $f(z)=1/z$ hat genau einen Pol im Nullpunkt, d.h. $M=\{0\}$; dessen Ordnung ist eins. Entsprechend hat $g(z)=1/(z-2)^2$ einen Pol zweiter Ordnung in $w=2$ und ist in allen anderen Punkten von $\mathbb{C}$ holomorph.

Ein Beispiel einer meromorphen Funktion mit unendlich vielen Polstellen ist
$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})}\,.$$
Diese Funktion ist holomorph in allen Punkten, in denen der Cosinus nicht verschwindet, d.h. auf $\mathbb{C}\setminus M$ mit
$$M=\left\{\pi/2+k\pi\;\middle|\;k\in\mathbb{Z}\right\}.$$
Vom Reellen her wissen wir, daß
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$
ist; dies gilt auch im Komplexen, denn
$$\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\Big(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\Big)=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots\,.$$
Wegen der Beziehungen
$$\cos(z-\pi/2)=\sin z\quad\text{und}\quad\cos(z+\pi/2)=-\sin z$$
ist dann auch
$$\lim_{z\to-\pi/2}\frac{\cos z}{z+\pi/2}=1\quad\text{und}\quad\lim_{z\to\pi/2}\frac{\cos z}{z-\pi/2}=-1\,;$$

entsprechend auch an den um 2π verschobenen Stellen. Damit ist auch
$$\lim_{z\to-\pi/2}\frac{z+\pi/2}{\cos z}=1\quad\text{und}\quad\lim_{z\to\pi/2}\frac{z-\pi/2}{\cos z}=-1\,,$$
also auch
$$\lim_{z\to-\pi/2}(z+\pi/2)\frac{\sin z}{\cos z}=\sin\pi/2=1$$
und
$$\lim_{z\to\pi/2}(z-\pi/2)\frac{\sin z}{\cos z}=-\sin(-\pi/2)=1\,.$$
Somit hat der Tangens in den Punkten aus M Pole erster Ordnung, ist also auf ganz $\mathbb{C}$ meromorph.

(Hier bewährt sich wieder, daß wir nur *einen* Punkt ∞ betrachten: Es wäre nicht möglich, den Tangens in sinnvoller Weise als Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ zu definieren, denn an jeder Polstelle ist der Grenzwert von der einen Seite gleich $-\infty$ und von der andern gleich ∞.)

In gewisser Weise ist das oben durchgerechnete Beispiel der Funktion $1/z$ im wesentlichen die *einzige* Funktion, für die das der Fall ist: Für $n\geq 2$ hat $1/z^n$ die Stammfunktion $1/(n-1)z^{n-1}$, und die ist auf ganz $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ definiert, d.h.
$$\int_\gamma\frac{dz}{z^n}=0$$
nicht nur für die oben definierte Kurve, sondern für jede geschlossene Kurve, die nicht durch 0 geht.

. . .

Kapitel 4
Differentialgleichungen

Differentialgleichungen sind das wohl wichtigste mathematische Hilfsmittel für Anwendungen in Naturwissenschaft und Technik. Die dahinterstehende Grundidee ist einfach: Man kann zwar nur selten *a priori* sagen, wie sich ein System über einen längeren Zeitraum hinweg entwickeln wird, aber man hat oft aufgrund von Naturgesetzen eine klare Vorstellung über die Zustandsänderung *im nächsten Augenblick,* d.h. also über den Wert der zeitlichen Ableitung der Zustandsgrößen in Abhängigkeit vom gegenwärtigen Zustand des Systems. Ein einfaches Beispiel hierfür liefert das zweite NEWTONsche Gesetz, wonach die zeitliche Ableitung des Impuls eines Teilchens gleich der auf das Teilchen wirkenden Kraft ist.

Allgemein sei ein System beschrieben durch n zeitlich veränderliche Größen $y_1(t), \dots, y_n(t)$; unter einem System von Differentialgleichungen oder kurz einer Differentialgleichung verstehen wir eine Vorschrift, die die zeitlichen Ableitungen $\dot y_1(t), \dots, \dot y_n(t)$ aus den Funktionswerten berechnet:

$$\begin{aligned} \dot y_1(t) &= f_1\bigl(t, y_1(t), \dots, y_n(t)\bigr) \\ \dot y_2(t) &= f_2\bigl(t, y_1(t), \dots, y_n(t)\bigr) \\ \vdots\ &\ \ \vdots \\ \dot y_n(t) &= f_n\bigl(t, y_1(t), \dots, y_n(t)\bigr) . \end{aligned}$$

Falls die Funktionen f_i nur von $y_1(t), \dots, y_n(t)$ abhängen und nicht auch noch direkt von der Zeit t spricht man von einem *autonomen* System. Da Naturgesetze nicht von der Zeit abhängen, hat man es in wissenschaftlich-technischen Anwendungen meist mit autonomen Systemen zu tun; man kann allerdings auch den Einfluß von Umgebungsgrößen durch einen zeitabhängigen Term abschätzen und so ein nichtautonomes System erhalten.

Einige Leser werden bei dieser Form einer Differentialgleichung wohl die höheren Ableitungen vermissen, die ja in den Anwendungen auch oft eine Rolle spielen: Bei zeitlich konstanter Masse schreibt man etwa das oben erwähnte zweite NEWTONsche Gesetz meist als

$$\vec F = m\ddot{\vec s}(t) ,$$

wobei $\vec s$ den Ortsvektor bezeichnet. Um dies auf obige Form zu bringen, muß man zusätzlich noch dessen Ableitung $\vec v(t) = \dot{\vec s}(t)$ betrachten und erhält dann das Differentialgleichungssystem

$$\dot{\vec v}(t) = \frac{1}{m}\vec F, \quad \dot{\vec s}(t) = \vec v(t)$$

aus sechs Gleichungen.

§1: Homogene lineare Differentialgleichungen

Am einfachsten sind Differentialgleichungssysteme, bei denen die Funktionen f_i auf der rechten Seite linear in den $y_j(t)$ sind; im Fall eines autonomen Systems ist dann einfach

$$f_i\bigl(y_1(t), \dots, y_n(t)\bigr) = a_{i1}y_1(t) + \cdots + a_{in}y_n(t) .$$

Fassen wir die Funktionen $y_1(t)$ bis $y_n(t)$ zu einem Vektor $\vec y(t)$ zusammen und die Zahlen a_{ij} zu einer Matrix A, so kann die Differentialgleichung kurz als

$$\dot{\vec y}(t) = A \cdot \vec y(t)$$

geschrieben werden. Solche Differentialgleichungen bezeichnen wir als *lineare homogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.*

Im Fall $n = 1$ hat so eine Gleichung einfach die Form

$$\dot y(t) = ay(t) ,$$

und wir wissen, daß für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$y(t) = \lambda e^{at}$$

dieser Differentialgleichung genügt. Damit kennen wir bereits *alle* Lösungen: Ist nämlich $y(t)$ irgendeine Lösungsfunktion, so können wir die neue Funktion

$$z(t) = y(t) \cdot e^{-at}$$

betrachten. Nach der LEIBNIZschen Produktregel ist

$$\dot{z}(t) = \dot{y}(t) \cdot e^{-at} + y(t)\cot(-a)e^{-at},$$

und das verschwindet, da $\dot{y}(t) = a \cdot y(t)$ ist. Also muß $z(t) = \lambda$ konstant sein und $y(t) = \lambda e^{at}$.

Im mehrdimensionalen Fall wollen wir ganz genauso vorgehen:

$$\dot{\vec{y}}(t) = A \cdot y(t) \Longrightarrow y(t) = e^{At} \cdot \vec{y}_0 .$$

Das Problem dabei ist, daß wir nicht wissen, was e^{At} sein soll; unsere erste Aufgabe ist es also, diesem Ausdruck eine Bedeutung zu geben.

a) Die Matrixexponentialfunktion

Wir orientieren uns wieder am Eindimensionalen: Für eine reelle Zahl x ist

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!},$$

also setzen wir analog für eine $n \times n$-Matrix X

$$e^X \underset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \cdot X^i .$$

Damit ist klar, daß e^X eine $n \times n$-Matrix sein soll, und das erklärt auch, warum oben der Konstantenvektor $\vec{y}_0$ auf der rechten Seite steht. Was wir uns noch überlegen müssen, ist die Konvergenz der Reihe.

Dazu müssen wir die Größe der Einträge in den Matrizen X^i abschätzen: Sind allgemein A, B zwei $n \times n$-Matrizen und sind die Beträge aller Einträge von A kleiner oder gleich a und die von B kleiner oder gleich b, so kann es in AB offensichtlich keinen Eintrag geben, dessen Betrag größer ist als nab: Schließlich ist jeder Eintrag in der Produktmatrix eine Summe von n Summanden, deren jeder Produkt je eines Eintrags von A und von B ist.

Um diese Formel leichter anwenden zu können, machen wir sie mutwillig schlechter und begnügen uns damit, daß jeder Eintrag von AB höchstens den Betrag $(na) \cdot (nb)$ hat.

Ist nun x der Betrag des größten Eintrags in der Matrix X, so folgt induktiv sofort, daß in X^i höchstens Zahlen bis zum Betrag $(nx)^i$ stehen können; in der endichen Teilsumme

$$\sum_{i=0}^{M} \frac{1}{i!} X^i$$

ist daher jeder Eintrag kleiner als

$$\sum_{i=0}^{M} \frac{(nx)^i}{i!} .$$

Letztere Summe konvergiert für $M \to \infty$ gegen e^{nx}, und damit muß auch die Matrixsumme konvergieren, denn die Reihe für e^{nx} ist konvergente Majorante eines jeden Eintrags. Insbesondere ist jeder Eintrag von e^X höchstens gleich e^{nx}.

Damit wissen wir also, daß die Matrix e^X für jede $n \times n$-Matrix X existiert; insbesondere ist die Funktion $t \mapsto e^{At}$ wohldefiniert.

Wir können natürlich nicht erwarten, daß die Matrixexponentialfunktion alle schönen Eigenschaften der gewöhnlichen Exponentialfunktion hat. Beispielsweise ist mur schwer vorstellbar, daß für beliebige Matrizen A und B gelten sollte $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$, denn wegen der Kommutativität der Matrizensumme, müßte dann auch $e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A$ sein, was zumindest unwahrscheinlich aussieht. In der Tat ist etwa für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^A = E + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^B = E + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$e^A \cdot e^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ,$$

aber da das Quadrat von $C = A + B$ gleich der Einheitsmatrix ist, ist

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= E + C + \frac{1}{2!} \cdot E + \frac{1}{3!} C + \cdots \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i)!} \right) \cdot E + \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)!} \right) \cdot C \\ &= \cosh(1) \cdot E + \sinh(1) \cdot C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e + e^{-1} & e - e^{-1} \\ e - e^{-1} & e + e^{-1} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Zum Glück gilt aber wenigstens

Lemma: Für zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $AB = BA$ ist

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A .$$

Insbesondere ist für $s, t \in \mathbb{R}$

$$e^{A(s+t)} = e^{As} \cdot e^{At} .$$

Beweis: Für zwei reelle Zahlen x, y ist $e^{x+y} = e^x e^y = e^y e^x$; damit gilt dieselbe Formel auch für zwei reellwertige Variablen x und y. Wenn wir in allen Potenzreihen alle x- und y-Potenzen oberhalb der N-ten ignorieren, sagt die Gleichung aus, daß drei Polynome in x und y *als Polynome* identisch sind.

Beim Rechnen mit Polynomen in x und y verwendet man keine speziellen Eigenschaften dieser Variablen *außer, daß sie kommutieren.* Damit kann man in so eine Polynomidentität auch Matrizen einsetzen, und wenn diese miteinander kommutieren, erhält man auf beiden Seiten dasselbe Ergebnis. Damit ist für kommutierende Matrizen A, B stets

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A .$$

Insbesondere kommutieren zwei skalare Vielfache derselben Matrix miteinander: $(sA)(tA) = st\, A^2$, und damit folgt auch die letzte Aussage des Lemmas. ■

Die für uns wichtigste Anwendung hiervon ist

Satz: Für jede $n \times n$-Matrix A ist die Funktion

$$\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times n} \\ t \mapsto e^{At} \end{cases}$$

stetig differenzierbar mit Ableitung $t \mapsto A \cdot e^{At} = e^{At} \cdot A$.

Beweis: Die Ableitung ist definiert als

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} .$$

Da die Matrizen At und Ah miteinander vertauschbar sind, ist nach dem gerade bewiesenen Lemma $e^{A(t+h)} = e^{At} \cdot e^{Ah}$, also

$$\frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} = e^{At} \cdot \frac{e^{Ah} - E}{h} .$$

Dabei ist

$$\frac{e^{Ah} - E}{h} = \frac{1}{h} \cdot \sum_{i=1} \infty \frac{(Ah)^i}{i!} = E + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(Ah)^i}{(i+1)!} .$$

Nach der obigen Diskussion ist jeder Eintrag der Matrix in der rechtsstehenden Summenmatrix höchstens gleich

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(ah)^i}{(i+1)!} = \frac{e^{ah} - 1}{h} ,$$

und der rechtsstehende Ausdruck geht für $h \to 0$ selbst gegen Null; wer das nicht gleich sieht, frage DE L'HOSPITAL. Damit ist

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(Ah)^i}{(i+1)!}$$

gleich der Nullmatrix und somit

$$\frac{d}{dt} e^{At} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} = e^{At} \cdot A .$$

Dies ist auch gleich $A\dot{e}^{At}$, denn da A mit jeder seiner Potenzen vertauschbar ist, ist es auch mit jeder endlichen Teilsumme der Reihe von e^{At} vertauschbar und damit auch mit e^{At} selbst. ■

Alles was uns jetzt noch fehlt zur Lösung eines linearen homogenen Differentialgleichungssystems sind Rechenregeln für den Umgang mit Ableitungen von Matrixfunktionen. Zumindest für Summen und Produkte gelten, wenn man von der Nichtkommutativität der Multiplikation absieht, die üblichen Regeln:

Lemma: $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ seien zwei matrixwertige Funktionen auf dem offenen Intervall (a,b). Dann ist

$$\frac{d}{dt}\big(f(t)+g(t)\big) = \dot{f}(t)+\dot{g}(t) \quad\text{und}\quad \frac{d}{dt}\big((f(t)g(t)\big) = \dot{f}(t)\cdot g(t)+f(t)\cdot\dot{g}(t)\,.$$

Für einen konstanten Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\frac{d}{dt}\big(f(t)\cdot\vec{v}\big) = \dot{f}(t)\cdot\vec{v}\,.$$

Beweis: Für die Summe ist dies klar: Sind $f_{ij}(t)$ und $g_{ij}(t)$ die Komponenten der Matrizen f und g, so sind die Summen $f_{ij}(t) + g_{ij}(t)$ die Komponenten von $f + g$, und deren Ableitung ist die Summe der Ableitungen.

Die (i,j)-Komponenten von fg ist die Funktion

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_{i\nu}(t)\cdot g_{\nu j}(t)\,,$$

und deren Ableitung ist

$$\sum_{\nu=1}^{n} \dot{f}_{i\nu}(t)\cdot g_{\nu j}(t) f_{i\nu}(t)\cdot\dot{g}_{\nu j}(t)\,,$$

die (i,j)-Komponente von $\dot{f}(t)\cdot g(t) + f(t)\cdot\dot{g}(t)$.

Sind $v_1,\dots,v_n$ die Komponenten des Vektors $\vec{v}$, so ist die i-te Komponente der vektorwertigen Funktion $f(t)\cdot\vec{v}$ gleich der Summe

$$\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t)\cdot v_j \text{ mit Ableitung } \sum_{j=1}^{n}\dot{f}_{ij}(t)\,,$$

und das ist die i-te Komponente von $\dot{f}(t)\cdot\vec{v}$. ■

Damit haben wir alles zusammen und können zeigen

Satz: : Die sämtlichen Lösungen der Differentialgleichung $\dot{y} = Ay$ sind genau die Funktionen $t \mapsto e^{At}y_0$ mit $y_0 \in \mathbb{R}^n$.

Beweis: Da e^{At} die Ableitung Ae^{At} hat, ist die Ableitung von $f(t) = e^{At}\cdot\vec{y}_0$ nach der zuletzt bewiesenen Formel gleich $A\cdot e^{At}\cdot\vec{y}_0$, also in der Tat gleich $A\cdot f(t)$.

Nun sei $y\colon (a,b) \to \mathbb{R}^n$ irgendeine differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft, daß $\dot{y}(t) = A\cdot y(t)$ ist. Wir betrachten die Funktion $g(t) = e^{-At}\cdot y(t)$. Deren Ableitung ist

$$\dot{g}(t) = -A\cdot e^{-At}\cdot y(t)+e^{-At}\cdot\dot{y}(t) = -A\cdot e^{-At}\cdot y(t)+e^{-At}\cdot Ay(t) = \vec{0}\,,$$

denn die Matrix A ist mit e^{-At} vertauschbar. Damit haben alle Komponenten von g die Ableitung Null, sind also konstant und damit ist $g(t) \underset{\text{def}}{=} \vec{y}_0$ ein konstanter Vektor mit der Eigenschaft, daß

$$\vec{y}_0 = e^{-At}\cdot y(t), \quad d.h. \quad y(t) = e^{At}\cdot y_0\,,$$

wie behauptet. ■

Korollar: Für jeden Vektor $y_0 \in \mathbb{R}^n$ und jede reelle Zahl $t_0 \in \mathbb{R}$ gibt es genau eine differenzierbare Funktion $y(t)$ mit den Eigenschaften, daß $\dot{y}(t) = Ay(t)$ und $y(t_0) = y_0$ ist; dies ist $y(t) = e^{A(t-t_0)}\cdot y_0$. ■

Die Kombination aus Differentialgleichung und vorgegebenem Funktionswert an einer bestimmten Stelle bezeichnet man als *Anfangswertproblem.* In dieser Form treten Differentialgleichungen in Anwendungen meistens auf: Um die künftige Entwicklung eines Systems zu bestimmen, dessen Zustand durch n Meßgrößen $y_1(t),\dots,y_n(t)$ beschrieben wird, geht man aus vom (meßbaren) Zustand zu einem Zeitpunkt t_0, den Zahlen $y_1(t_0),\dots,y_n(t_0)$ also, und den Naturgesetzen, denen das System unterliegt. Letztere sind meist durch Differentialgleichungen ausdrückbar.

Wir können das obige Korollar auch etwas abstrakter interpretieren: Sind $y(t)$ und $z(t)$ zwei Lösungsfunktionen der Differentialgleichung $\dot{y}(t) = Ay(t)$, so ist auch jede Linearkombination $\alpha y(t) + \beta z(t)$ eine Lösung; die Lösungen bilden also einen Vektorraum. Obiges Korollar sagt uns, daß dieser Vektorraum die Dimension n hat und daß für jede reelle Zahl t_0 die Abbildung $y \mapsto y(t_0)$ ein Isomorphismus auf den $\mathbb{R}^n$ ist.

b) Lineare homogene Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

In der Elektrotechnik hat man es meist mit Differentialgleichungen der Art

$$y^n(t) + a_{n-1}y^{n-1}(t) + \cdots + a_1y'(t) + y_0y(t) = 0 \qquad (*)$$

zu tun, oft auch noch mit einer Funktion $f(t)$ auf der rechten Seite, aber die hat natürlich im Paragraphen über *homogene* Differentialgleichungen noch nichts zu suchen.

Gleichung $(*)$ läßt sich leicht in die Theorie des vorigen Abschnitts einordnen; als Leitfaden kann das Beispiel des zweiten NEWTONschen Gesetzes am Beginn dieses Kapitels dienen: Dort hatten wir außer dem Weg noch die Geschwindigkeit als neue Variable eingeführt und konnten daraufhin alles mit ersten Ableitungen ausdrücken.

Im allgemeinen Fall gehen wir genauso vor: Wir betrachten die n Funktionen

$$y_1(t) \underset{\text{def}}{=} y(t), \quad y_2(t) \underset{\text{def}}{=} \dot{y}(t), \quad \ldots, \quad y_n(t) \underset{\text{def}}{=} y^{(n-1)}(t)\,;$$

diese erfüllen die Gleichung

$$\dot{y}_n(t) = -\big(a_{n-1}y^{n-1}(t) + \cdots + a_1y'(t) + y_0y(t)\big)$$

sowie die Gleichungen

$$\dot{y}_1(t) = y_2(t), \quad \dot{y}_2(t) = y_3(t), \quad \ldots, \quad \dot{y}_{n-1}(t) = y_n(t)\,.$$

Diese bilden zusammen ein System, wie wir es im vorigen Paragraphen betrachtet haben, wir wissen also, daß es für jede Anfangsbedingung der Form

$$y(t) = y_1(t_0) = a_1, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_n(t_0) = a_n$$

genau eine Lösung gibt. Somit können wir den Funktionswert $y(t_0)$ sowie auch die Werte der ersten $n-1$ Ableitungen an einer Stelle t_0 vorgeben und haben dann genau eine Lösung der Differentialgleichung.

Im Prinzip wissen wir aus dem vorigen Abschnitt auch bereits, wie diese Lösung aussieht; da es allerdings nicht so verlockend erscheint, eine Matrixexponentialfunktion mit unseren derzeitigen Kenntnissen wirklich auszurechnen, wollen wir uns eine alternative Darstellung der Lösung überlegen.

Zumindest heuristisch erscheint es ganz plausibel, wenn wir Lösungen der Form $y(t) = e^{rt}$ erwarten, also lohnt sich zumindest der Versuch, eine solche Funktion in die Differentialgleichung $(*)$ einzusetzen. Da bei der Ableitung einer Exponentialfunktion einfach der Vorfaktor der Variablen nach vorne kommt, ist $y^{(k)}(t) = r^ke^{rt}$; falls $y(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung ist, muß also

$$\begin{aligned} &r^ne^{rt} + a_{n-1}r^{n-1}e^{rt} + \cdots + a_1re^{rt} + a_0e^{rt} \\ &= (r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1r + a_0)e^{rt} \end{aligned}$$

verschwinden; da e^{rt} nirgends verschwindet, kann dies nur passieren, wenn der Klammerinhalt zu Null wird.

Definition: Das Polynom

$$r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1r + a_0$$

heißt *charakteristisches Polynom* der Differentialgleichung

$$y^n(t) + a_{n-1}y^{n-1}(t) + \cdots + a_1y'(t) + a_0y(t) = 0\,.$$

Dieses Polynom muß natürlich keine reelle Nullstelle haben; für die (wohlbekannte) Differentialgleichung $\ddot{y}(t) + y(t) = 0$ etwa ist es gleich $r^2 + 1$ und somit positiv für jedes reelle r.

Wir wissen aber, daß es nach dem Fundamentalsatz der Algebra n komplexe Nullstellen $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{C}$ gibt, so daß

$$r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1r + a_0 = (r - r_1) \cdot \cdots \cdot (r - r_n)$$

ist.

Diese Nullstellen müssen selbstverständlich nicht alle verschieden sein; wir betrachten aber der Einfachheit halber zunächst den Fall, daß sie es sind.

Wir wissen, daß der Lösungsraum der Differentialgleichung $(*)$ ein n-dimensionaler Vektorraum ist, und wir haben bei lauter verschiedenen Wurzeln r_i insgesamt n Lösungsfunktionen gefunden. Diese Funktionen sind zwar nicht notwendigerweise reell, aber wenn ein Polynom mit reellen Koeffizienten eine komplexe Nullstelle hat, muß auch die konjugiert komplexe Zahl eine Nullstelle sein, d.h. die komplexen Nullstellen kommen in Paaren konjugiert komplexer Zahlen

$$r = u + iv \quad \text{und} \quad \overline{r} = u - iv\,,$$

und wir können anstelle der beiden kompexen Lösungen

$$e^{rt} = e^{ut}(\cos vt + i\sin vt) \quad \text{und} \quad e^{\overline{r}t} = e^{ut}(\cos vt - i\sin vt)$$

die beiden reellen Lösungen

$$\frac{e^{re} + e^{\overline{r}t}}{2} = e^{ut}\cos vt \quad \text{und} \quad \frac{e^{re} - e^{\overline{r}t}}{2i} = e^{ut}\sin vt$$

betrachten. Wir haben somit in jedem Fall n verschiedene reelle Lösungsfunktionen.

Angenommen, diese n Funktionen seien linear abhängig. Dann können wir eine nichttriviale Linearkombinination dieser Funktionen finden, die identisch verschwindet. Wir wählen unter den eventuell mehreren solchen Linearkombinationen eine, in der so wenige wie möglich der n Funktionen mit von Null verschiedenem Koeffizienten vorkommen. Diese Linearkombination multiplizieren wir mit $e^{-u_0 t}$, wobei u_0 der größte Realteil eines vorkommenden r_i sei. Beim Grenzübergang $t \to \infty$ gehen dann alle Terme mit $\mathfrak{Re}\, r_i \neq u_0$ gegen Null, übrig bleiben nur noch die Terme mit $\mathfrak{Re}\, r_i = u_0$. Falls es nur einen solchen Term gibt, folgt, daß dieser mit Koeffizient Null auftreten muß, im Widerspruch zur angenommenen Minimalität der Linearkombination. Andernfalls bleibt eine Linearkombination von Sinus- und Cosinustermen zu verschiedenen Frequenzen. Ersetzt man hier t durch $-t$ und addiert *bzw.* subtrahiert die entstehende und die ursprüngliche Linearkombination, sieht man, daß auch schon die Cosinusterme für sich

alleine genommen (zusammen mit einer eventuellen Konstanten) und die Sinusterme für sich alleine genommen linear abhängig sind. Ein kurzer Blick auf das FOURIER-Integral zeigt, daß dies absurd ist.

Also sind die n Lösungsfunktionen linear unabhängig und bilden somit eine Basis des Lösungsraums. Damit läßt sich die allgemeine Lösung nach Auflösung der charakteristischen GLeichung also leicht angeben, und wir müssen keine Matrixexponentialfunktion berechnen. Bei Anfangswertproblemen muß allerdings noch ein lineares Gleichungssystem gelöst werden, um die richtigen Koeffizienten zu ermitteln.

Bleibt noch der Fall mehrfacher Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

...

c) Berechnung der Matrixexponentialfunktion

Im allgemeinen Fall eines linearen homogenen Differentialgleichungssystems sind wir leider nicht in der glücklichen Lage, daß wir die Berechnung von e^{At} vermeiden können; wir müssen uns daher überlegen, wie wir diese Matrix am besten ausrechnen.

Zumindest ein Fall ist problemlos: Ist nämlich

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix, ist offensichtlich

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{d_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{d_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{d_n t} \end{pmatrix}$$

wieder eine Diagonalmatrix, wobei die Exponentialfunktion einfach komponentenweise auf die Diagonaleinträge ihres Arguments angewandt wird.

Diagonalmatrizen treten leider eher selten auf; wir können eine gegebene Matrix aber, wenn wir sie bezüglich der richtigen Basis betrachten, erheblich vereinfachen: Falls beispielsweise die algebraische Vielfachheit eines jeden Eigenwerts gleich seiner geometrischen Vielfachheit ist, hat der $\mathbb{R}^n$ eine Basis aus Eigenvektoren der Matrix, und bezüglich dieser Basis hat die Matrix Diagonalgestalt. Ist B die Matrix des Basiswechsels, ist also $D = B^{-1}AB$ eine Diagonalmatrix. Nach dem Distributivgesetz ist

$$B^{-1}(A_1 + A_2)B = B^{-1}A_1B + B^{-1}A_2B \,,$$

und entsprechendes gilt natürlich für jede endliche Summe von Matrizen. Außerdem ist

$$B^{-1}(A_1 \cdot A_2)B = B^{-1}A_1B \cdot B^{-1}A_2B$$

und

$$B^{-1}A_1^m B = (B^{-1}A_1B)^m \,,$$

also im Limes auch

$$B^{-1}e^A B = e^{B^{-1}AB} \quad \text{und} \quad e^A = Be^{B^{-1}AB}B^{-1} \,.$$

Zumindest für eine diagonalisierbare Matrix ist also die Exponentialfunktion nicht schwieriger als die Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren und die Transformation der Matrix in ihre Diagonalgestalt.

Insbesondere gibt es also keine großen Probleme mit Matrizen, die lauter verschiedene Eigenwerte haben; dann sind die Lösungen des Differentialgleichungssystems allesamt Linearkombinationen der Funktionen $e^{\lambda_i t}$, wobei λ_i die Eigenwerte der Matrix sind. Dies sieht fast genauso aus wie im vorigen Abschnitt, und in der Tat ist das dort definierte charakteristische Polynom (von einem eventuellen Vorzeichenfaktor abgesehen) nichts anderes als das charakteristische Polynom der Matrix des zugehörigen Differentialgleichungssystems.

Am besten sieht man, was passiert, wenn man das ursprüngliche Differentialgleichungssystem transformiert auf das Koordinatensystem

es $\mathbb{R}^n$, das der Eigenwertbasis entspricht. Die entsprechenden Linearkombinationen z_j der y_i erfüllen dann Differentialgleichungen der Form

$$\dot{z}_j = \lambda_j z_j \,,$$

wobei λ_j der zu z_j gehörende Eigenwert von A ist. Damit ist natürlich $z_j = a_j e^{\lambda_j t}$, und die y_i lassen sich durch Rücktransformation zur Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ als Linearkombinationen der z_j berechnen.

Falls auch Eigenwerte auftreten, deren geometrische Vielfachheit kleiner ist als die algebraische, können wir nicht so argumentieren; dann können wir A nicht auf eine Diagonalmatrix transformieren, sondern nur auf eine Dreiecksmatrix.