Wolfgang K. Seiler

Höhere Mathematik II

Vorlesung an der Universität Mannheim
im Wintersemester 1997/1998

Dieses Skriptum entsteht parallel zur Vorlesung und soll mit möglichst geringer Verzögerung verteilt werden. Es ist in seiner Qualität auf keinen Fall mit einem Lehrbuch zu vergleichen; insbesondere sind Fehler bei dieser Entstehensweise nicht nur möglich, sondern **sicher**. Dabei handelt es sich sicherlich nicht immer nur um harmlose Tippfehler, sondern auch um Fehler bei den mathematischen Aussagen.

Das Skriptum sollte daher mit Sorgfalt und einem gewissen Mißtrauen gegen seinen Inhalt gelesen werden; falls Sie Fehler finden, teilen Sie mir dies bitte persönlich oder per e-mail (seiler@math.uni-mannheim.de) mit, oder informieren Sie Ihre Übungsgruppenleiterin. Auch wenn Sie Teile des Skriptums unverständlich finden, bin ich für entsprechende Hinweise dankbar.

Falls genügend viele Hinweise eingehen, werde ich von Zeit zu Zeit Berichtigungen und Verbesserungen ausgeben.

Literaturhinweise

Im zweiten Teil des Kurses *Höhere Mathematik* müssen wir natürlich gelegentlich auf Stoff aus Teil I zurückgreifen; der erste Teil des Skriptums wird zitiert als **[HM1]**. Auch auf Stoff der Analysis I werden wir gelegentlich zurückgreifen müssen, also beispielsweise auf

[Bö] S. BÖCHERER: *Analysis I,* Universität Mannheim, 1996/97

Ansonsten ändert sich wenig: Von den in **[HM1]** zitierten Werken können alle weiterverwendet werden, allerdings brauchen wir bei den mehrbändigen Werken nun teilweise noch zusätzliche Bände.

[D] H.J. DIRSCHMID: *Mathematische Grundlagen der Elektrotechnik,* Vieweg, 1992

als einbändiges Werk ist davon nicht betroffen; das in **[HM1]** gesagte gilt auch weiterhin: Etwa fünf Pfund Mathematik, die nicht nur diese Vorlesung mehr als abdecken, sondern für viele Studenten für deren gesamtes Berufsleben ausreichen dürften. Der Schwerpunkt liegt allerdings eindeutig auf dem Gebiet der Analysis; numerische Mathematik und die Statistik sind so gut wie nicht vorhanden.

[MV1] K. MEYBERG, P. VACHENAUER: *Höhere Mathematik I,* Springer, 1995

wird nun ergänzt durch

[MV1] K. MEYBERG, P. VACHENAUER: *Höhere Mathematik II,* Springer, 1997

Zusammen decken diese beiden Bände den gesamten Stoff der Vorlesungen *Höhere Mathematik I+II* ab sowie die relevanten Teile der *Analysis I;* die Beweise sind meist vollständig. Dazu kommt noch etwas Numerik in recht kompakter Darstellung, wobei für einige Grundalgorithmen auch Programme angegeben sind.

[BDH] BRAUCH/DREYER/HAACKE: *Mathematik für Ingenieure Maschinenbau/Elektrotechnik,* Teubner 1977

Dieses Buch richtet sich an Studenten von Fachhochschulen, deckt aber auch einen großen Teil dieser Vorlesung ab; für uns zu knapp ist vor allem die Darstellung der Vektoranalysis. Dafür gibt es Kapitel, die auch Themen wie Statistik, Fehlerrechnung, *usw.* darstellen.

[F] P. FURLAN: *Das gelbe Rechenbuch 1–3,* Verlag Martina Furlan, Dortmund, *o.J.*

Wer vor allem auf Drill und durchgerechnete Beispiele Wert legt, findet hier laut Untertitel „Rechenverfahren der Höheren Mathematik in Einzelschritten erklärt. Mit vielen ausführlich gerechneten Beispielen“. Die drei Bände decken zwar nicht alles ab, aber doch ziemlich viel. Der Stoff der HM II findet sich in Band 2 und 3.

Dazu seien noch einige „Klassiker“ genannt, die seit mehreren Jahrzehnten in immer neuen Auflagen erscheinen und die auch heute noch interessant sind. Es handelt sich um Werke aus meist recht vielen Bänden, wobei selbst der Stoff von nur einer Vorlesung *Höhere Mathematik I* oder *II* je nach Organisation des Gesamtwerks auf bis zu drei Bände verteilt sein kann. Wegen der Vielzahl von Auflagen und Bänden verzichte ich auf die Angabe von Erscheinungsjahren.

[S] W.I. SMIRNOW: *Lehrbuch der Höheren Mathematik,* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

Ein Klassiker, nach dem Generationen von russischen und (nicht nur ost-)deutschen Naturwissenschaftlern und Ingenieuren ausgebildet wurden; enthält in vier Bänden (von denen die letzten beiden noch in Halbbände unterteilt sind) den gesamten klassischen Stoff der *Höheren Mathematik* und ist auch heute noch sehr gut zu lesen. Die HM II behandelt Stoff aus den Bänden I und II.

[Du] A. DUSCHEK: *Höhere Mathematik,* Springer Wien

Die österreichische Variante, vier recht ausführliche Bände, von denen hier vor allem der zweite und der dritte von Interesse sind.

[A] G. AUMANN: *Höhere Mathematik,* Bibliographisches Institut Mannheim

Drei relativ dünne Taschenbücher, deren erste beide trotzdem fast alles enthalten, was wir in dieser Vorlesung brauchen. Die Darstellung ist natürlich weniger ausführlich als in den dickleibigen Werken, aber das wird nicht jeder Student als Nachteil empfinden.

[C] R. COURANT: *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung I+II,* Springer

Ein Klassiker eines berühmten Mathematikers, auch heute noch sehr lesenswert. Trotz des Titels beschränkt sich das Buch nicht auf Analysis, sondern behandelt auch beispielsweise die Lineare Algebra in einem Umfang, der für diese Vorlesung völlig ausreicht.

Kapitel 3
Differential- und Integralrechnung mehrerer Veränderlicher

In diesem Kapitel geht es um die Verallgemeinerung der bislang nur für Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bekannten Grundtechniken der Analysis auf Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ für beliebige natürliche Zahlen n, m.

Eine solche Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ läßt sich offensichtlich immer in der Form

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \bigl(f_1(x_1, \ldots, x_n),\ \ldots\ , f_m(x_1, \ldots, x_n)\bigr)$$

schreiben mit m Funktionen $f_j\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Somit spielt der Fall $m = 1$ eine fundamentale Rolle auch für beliebiges m und verdient es, vorab behandelt zu werden.

§1: Skalarwertige Funktionen mehrer Veränderlicher

Wir bezeichnen Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ als *skalarwertig,* da wir gewohnt sind, Elemente von $\mathbb{R}^n$ als Vektoren, solche von $\mathbb{R}$ aber als Skalare zu bezeichnen.

Falls wir allerdings Elemente von $\mathbb{R}^n$ wirklich als *Vektoren* betrachten wollen, entspricht dies einerseits nicht der Sichtweise der Analysis, die an Punkte denkt und nicht an Pfeile oder die daraus abgeleiteten Vektoren; außerdem wäre es auch schrecklich, wenn wir immer

$$f\left(\vec{x}\right)$$

schreiben müßten, um einen einfachen Funktionswert zu bezeichnen. Die Alternative

$$f(x_1, \ldots, x_n)$$

ist auch nicht gerade attraktiv: Bei komplizierteren Formeln werden die Ausdrücke dann leicht mehrzeilig und damit unübersichtlich und schwer lesbar.

Ein in der Mathematik häufig gewählter Ausweg besteht darin, daß man

$$x \underset{\text{def}}{=} (x_1, \ldots, x_n) \quad \text{und} \quad f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

schreibt; eine soweit völlig klare und verständliche Abkürzung, die wir auch in dieser Vorlesung benutzen werden.

Nun gibt es aber (zum Glück) nur wenige Puristen, die in den besonders interessanten Fällen des $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ die Koordinaten mit x_1, x_2 und gegebenenfalls noch x_3 bezeichnen; der Rest schreibt x, y *bzw.* x, y, z. Damit hat man dann im $\mathbb{R}^3$ die zunächst äußerst verwirrende Abkürzung

$$f(x) = f(x, y, z)\,.$$

Mit etwas Übung läßt die Verwirrung schnell nach: Wenn eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ nur ein Argument hat, *muß* es sich dabei um einen Punkt des $\mathbb{R}^3$ halten; wenn sie drei Argumente hat, kann es sich dabei nur um Koordinaten halten, so daß es nicht schwer sein sollte, die unterschiedliche Bedeutung von x in den beiden Ausdrücken

$$f(x) \quad \text{und} \quad f(x, y, z)$$

zu erkennen.

Hier im Skriptum – im Gegensatz zur Vorlesung – ist es möglich, die anfängliche Verwirrung noch etwas zu reduzieren: Ich werde Punkte im $\mathbb{R}^n$ durch Fettdruck kennzeichnen, während Koordinaten in Normalschrift geschrieben werden; hier im Skriptum ist also

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \quad \text{und} \quad f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)\,,$$

was beispielsweise im $\mathbb{R}^3$ üblicherweise in der Form

$$\mathbf{x} = (x, y, z) \quad \text{und} \quad f(\mathbf{x}) = f(x, y, z)$$

erscheinen wird.

Nur auf den ersten Blick seltsam ist die Verknüpfung von Punkten mit Vektoren: Vektoren, wie wir sie im letzten Semester kennengelernt

haben, sind Äquivalenzklassen von Pfeilen, und die Anwendung eines solchen Vektors $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ auf einen Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ besteht natürlich darin, daß man den Punkt $\mathbf{x}$ um den Vektor $\vec{v}$ verschiebt: Die Gleichung

$$\mathbf{x} + \vec{v} = \mathbf{y}$$

bedeutet also nichts anderes, als daß $\mathbf{y}$ aus $\mathbf{x}$ durch Verschiebung um $\vec{v}$ entsteht oder, anschaulicher, daß der Vektor $\vec{v}$ durch einen Pfeil mit Anfangspunkt $\mathbf{x}$ und Endpunkt $\mathbf{y}$ repräsentiert werden kann.

In Formeln ist diese Addition die gewöhnliche Addition in $\mathbb{R}^n$: Mit

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

ist

$$\mathbf{x} + \vec{v} = (x_1 + v_1, \ldots, x_n + v_n)\,.$$

Dies reicht hoffentlich als bürokratischer Teil der Vorbereitung, als nächstes wollen wir uns überlegen, wie man sich eine Funktion mehrerer Veränderlicher veranschaulichen kann.

Für Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind wir gewohnt, deren Graphen

$$\Gamma_f \underset{\text{def}}{=} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = f(x) \right\}$$

zu zeichnen; entsprechend können wir natürlich auch für eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ den Graphen

$$\Gamma_f \underset{\text{def}}{=} \left\{ (\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \;\middle|\; y = f(\mathbf{x}) \right\}$$

definieren; da dieser in $\mathbb{R}^{n+1}$ liegt, ist er allerdings nur für $n = 2$ wirklich anschaulich, und auch da kann es bei komplizierten Funktionen stark von der gewählten Perspektive abhängen, was man sieht. Für einfache Funktionen zweier Veränderlicher jedoch ist der Graph sicherlich die einfachste Methode der Veranschaulichung. Beim Graphen der Funktionen

$$f\colon \begin{cases} [-1, 1] \times [-1, 1] & \to \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \sqrt{4 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

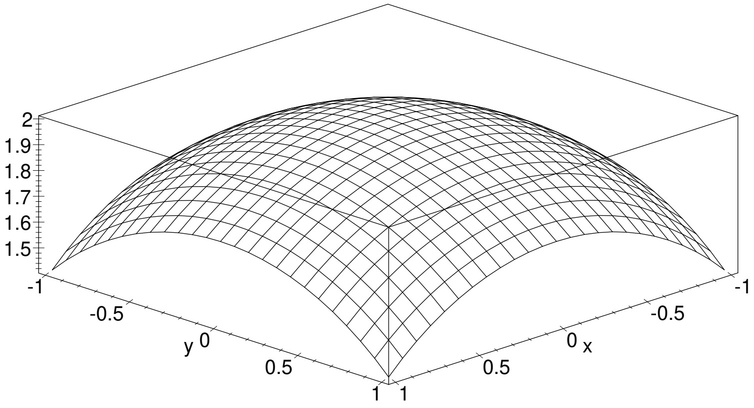


Abb. 1: Graph der Funktion $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

in Abbildung 1 etwa sieht man recht gut, daß Γ_f Teil einer Kugeloberfläche ist.

Eine andere Möglichkeit zur Veranschaulichung von Funktionen zweier Veränderlicher ist von topographischen Karten her bekannt: Dort wird die Höhe über dem Meeresspiegel, eine Funktion der beiden Ebenenkoordinaten, dargestellt durch *Höhenlinien.* Entsprechend können wir für eine beliebige Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und jeden Wert $c \in \mathbb{R}$ die *Niveaulinie*

$$N_c(f) \underset{\text{def}}{=} \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f(x,y) = c \right\}$$

definieren; sie muß natürlich keine „Linie“ sein, sondern kann auch nur aus einigen Punkten bestehen, leer sein oder – im Falle einer konstanten Funktion – für einen Wert c aus dem gesamten Definitionsbereich D der Funktion bestehen.

Im Falle des obigen Beispiels etwa ist $N_c(f)$ für $c > 2$ und für $c < \sqrt{2}$ die leere Menge; für $c = 2$ besteht sie nur aus dem Nullpunkt, und für $c = \sqrt{2}$ aus den vier Punkten $(0, \pm 1)$ und $(\pm 1, 0)$. Für $\sqrt{2} < c < 2$ erhalten wir die in Abbildung 2 für $c = 1{,}5$ bis $c = 2$ in Schritten von 0,05 dargestellten Kreislinien

$$\sqrt{4 - x^2 - y^2} = c \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 = 4 - c^2\,,$$

eingeschränkt natürlich auf das Einheitsquadrat als dem Definitionsbereich von f.

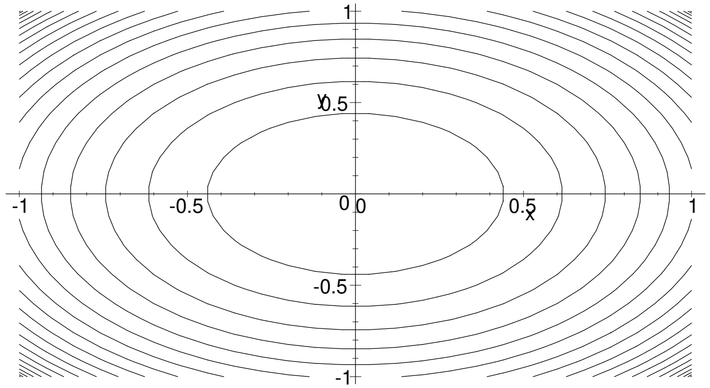


Abb. 2: Niveaulinien der Funktion $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

Für Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen ist die Visualisierung naturgemäß schwieriger; wir können Graphen und Nivealinien, -flächen *usw.* zwar problemlos definieren, aber nicht mehr zeichnen – es sei denn, es handelt sich um sehr einfache Niveauflächen im $\mathbb{R}^3$.

Ansonsten gibt es für Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen im allgemeinen keine andere Möglichkeiten, als einen Teil der Variablen auf interessanten Werten festzuhalten und die so eingeschränkte Funktion darzustellen. Dies gibt natürlich kein vollständiges Bild der Funktion.

Für Funktionen von drei Veränderlichen verwendet man, speziell bei elektrischen oder magnetischen Feldern, gelegentlich auch Feldlinien oder Kraftvektoren zur Visualisierung; bevor wir so etwas mathematisch definieren können, müssen wir allerdings zunächst wissen, wie man Funktionen mehrerer Veränderlicher differenziert.

Dazu müssen wir uns als erstes an den Begriff der Stetigkeit erinnern. Die Idee hinter dem Stetigkeitsbegriff ist bekanntlich, daß eine stetige Funktion nahe beieinanderliegende Punkte nicht zu sehr auseinanderreißen darf, genauer: Wenn sich zwei Punkte aufeinanderzu bewegen, sollen sich auch die Funktionswerte aufeinanderzu bewegen. Formal:

Definition: *a)* Der Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ heißt *Grenzwert* der Folge $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, in Zeichen

$$\mathbf{x} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n ,$$

wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß

$$d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) < \varepsilon \quad \text{für} \quad n > N ,$$

wobei

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

den EUKLIDischen Abstand der beiden Punkte

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \quad \text{und} \quad \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$$

des $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

b) Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt stetig im Punkt $\mathbf{x} \in D$, wenn für jede Folge $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\mathbf{x}_n \in D$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(\mathbf{x}_n) = f(\mathbf{x}) .$$

f heißt stetig in D (oder einfach stetig), wenn f in jedem Punkt von D stetig ist.

Als einfaches Beispiel können wir etwa die Funktion

$$+\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto x + y \end{cases}$$

betrachten: Für jede Folge von Punkten (x_n, y_n) mit Grenzwert (x, y) ist

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y ,$$

denn für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß

$$d\big((x_n, y_n), (x, y)\big) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für} \quad n > N$$

ist. Alsdann liegt der Punkt (x_n, y_n) für $n > N$ im Kreis mit Radius $\varepsilon/2$ um (x, y), so daß auch

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$$

sind. Nach der Dreiecksungleichung ist daher

$$\big|(x + y) - (x_n + y_n)\big| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon ,$$

so daß +, wie erwartet eine stetige Funktion ist.

Genauso überlegt man sich, daß auch Subtraktion und Multiplikation stetige Funktionen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definieren; die Division kann natürlich nur als Funktion

$$/\colon \begin{cases} \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) & \to \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto x/y \end{cases}$$

definiert werden; der Leser sollte sich als Übung genau überlegen, warum auch diese Funktion stetig ist.

Durch Kombination dieser Aussagen folgt, daß eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$, bei der die Berechnungsvorschrift nur aus Grundrechenarten zusammengesetzt ist, immer stetig ist, falls man den Definitionsbereich D so wählt, daß Divisionen durch Null ausgeschlossen sind. Auch wenn man noch mit klassischen stetigen Funktionen einer Veränderlichen kombiniert, bleibt die Funktion stetig, also ist beispielsweise auch

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto \dfrac{(x - y) \cdot \sin(x^2 + y^2 + z^2)}{e^{(yz - x)^3}} \end{cases}$$

stetig, denn der Nenner kann nie Null werden.

Soweit ist also alles in Ordnung. Wenn man genauer hinsieht, ist Stetigkeit für Funktionen mehrerer Veränderlicher allerdings ein erheblich komplexeres Thema als Stetigkeit für Funktionen einer Veränderlicher.

Als warnendes Beispiel betrachten wir die Funktion

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2 + y^4} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{cases} .$$

Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist die Funktion offensichtlich stetig, denn dort ist sie nur durch Grundrechenarten definiert und Division durch Null ist ausgeschlossen, da $x^2 + y^4$ nur im Nullpunkt verschwindet. Bleibt also der Punkt $(0,0)$ zu untersuchen.

Der Graph von f in einer kleinen Umgebung von $(0,0)$ ist in Abbildung 3 zu sehen. Er zeigt zwar einen relativ steilen Sprung entlang der Geraden $x = 0$, aber nur für die etwas weiter vom Nullpunkt entfernten x-Werte; bei $y = 0$ sieht alles harmlos und eben aus.

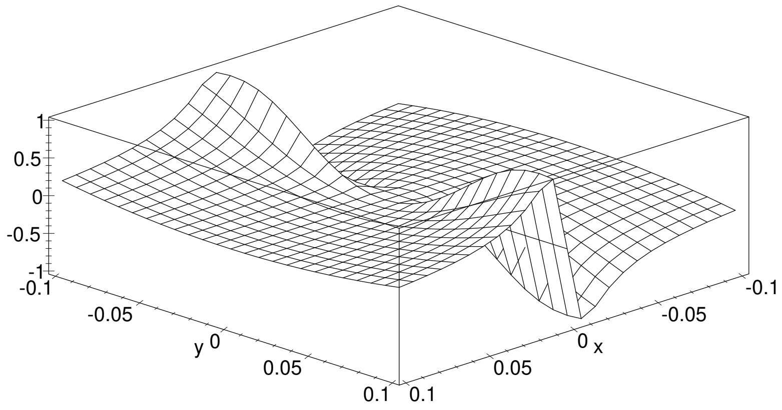


Abb. 3: Ist diese Funktion stetig?

Nun ist der abgebildete Graph natürlich von einem Computer aufgrund von nur endlich vielen Stützpunkten konstruiert; um wirklich zu entscheiden, ob f im Nullpunkt stetig ist, können wir uns nicht auf diese Approximation verlassen, sondern müssen die Funktion etwas genauer untersuchen.

Da wir uns im Eindimensionalen recht gut auskennen, können wir beispielsweise die Einschränkungen von f auf die verschiedenen Geraden durch den Nullpunkt betrachten. Abgesehen von der y-Achse haben diese alle die Form $y = ax$ mit $a \in \mathbb{R}$, und

$$f(x, ax) = \frac{2x \cdot (ax)^2}{x^2 + (ax)^4} = \frac{2ax^3}{x^2(1 + ax^2)} = \frac{2ax}{1 + ax^2}$$

für $x \neq 0$. Für $x \to 0$ geht beim rechtsstehenden Ausdruck der Zähler gegen Null und der Nenner gegen eins; der Grenzwert existiert also und ist gleich $f(0,0) = 0$, d.h. die Einschränkung von f ist stetig auf der Geraden $y = ax$.

Auf der y-Achse verschwindet f für jeden Wert von x, ist also ebenfalls stetig, d.h. die Einschränkung von f auf jede Gerade durch den Nullpunkt ist stetig.

Betrachten wir zur Vorsicht auch noch die Einschränkung von f auf die Parabel $x = ay^2$! Dort ist

$$f(ay^2, y) = \frac{2ay^2 \cdot y^2}{a^2y^4 + y^4} = \frac{2ay^4}{(1 + a^2)y^4} = \frac{2a}{1 + a^2}$$

für alle $y \neq 0$, wohingegen $f(0,0) = 0$ ist. Für $a \neq 0$ ist die Einschränkung von f auf diese Parabel also nicht stetig, und damit kann auch f nicht stetig sein, denn für eine stetige Funktion muß schließlich

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

sein unabhängig davon, auf welchem Weg der Punkt (x,y) gegen $(0,0)$ wandert.

Zusammen mit den Koordinatenachsen überdecken die Parabeln $x = ay^2$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ den gesamten $\mathbb{R}^2$, die Niveaulinie $N_0(f)$ von f besteht also aus den beiden Koordinatenachsen, während die anderen Niveaulinien aus Parabeln $x = ay^2$ jeweils ohne den Nullpunkt bestehen; siehe Abbildung 4. Da die Gleichung

$$\frac{2a}{1 + a^2} = c$$

für $c \neq 0$ die beiden Lösungen

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{1 - c^2}}{c}$$

hat, besteht jede Niveaulinie für $0 < |c| < 1$ aus zwei dieser Parabeln, für $|c| = 1$ aus einer, und für $|c| > 1$ ist $N_c(f) = \emptyset$.

Auch Abbildung 4 zeigt, daß f im Nullpunkt unstetig ist, denn alle Niveaulinien kommen dem Nullpunkt beliebig nahe, obwohl dieser nur

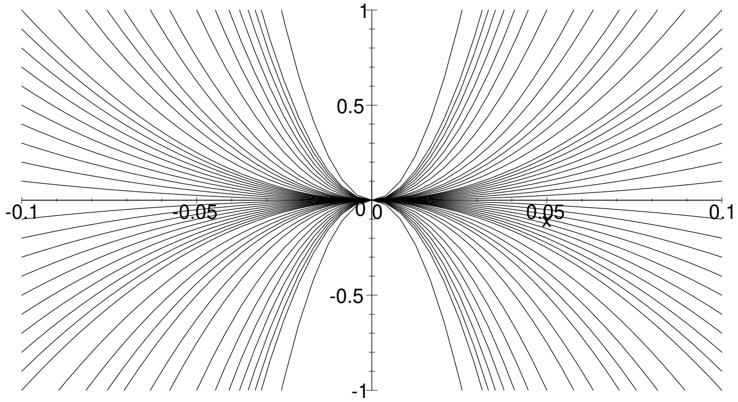


Abb. 4: Die Niveaulinien illustrieren die Unstetigkeit im Nullpunkt

auf $N_0(f)$ liegt. Daran sehen wir übrigens auch, daß der Graph in Abbildung 3 falsch ist: In jeder Umgebung von $(0,0)$ wird jeder Wert c zwischen -1 und 1 angenommen, der Abschluß des Graphen enthält also die Strecke $[-1,1]$ auf der z-Achse. In Abbildung 3 ist dies nicht zu sehen, da Maple, wie die meisten Computergraphikprogramme zum Zeichnen nur die Linien $x =$ konstant und $y =$ konstant berücksichtigte.

Bei Funktionen, in deren Definition Fallunterscheidungen eingehen ist also größere Vorsicht geboten als im Eindimensionalen; bei in der Praxis auftretenden Funktionen wird es allerdings wohl meist so sein, daß die Unstetigkeitsstellen genau dort auftreten, wo man Sprünge definiert hat. Schwierig wird es nur, wenn man wie im obigen Beispiel in einem Punkt eine Situation der Art „$0/0$" hat und entscheiden muß, ob man stetig ergänzen kann: Hier hilft im Mehrdimensionalen keine DE L'HOSPITALsche Regel, es hilft auch nicht, die Annäherung der Funktion an den problematischen Punkt aus allen Richtungen zu untersuchen, sondern man muß wirklich auf die Definition der Stetigkeit zurückgehen.

Damit genug zur Stetigkeit; was wir in erster Linie brauchen, ist die Möglichkeit, Funktionen mehrerer Veränderlicher zu differenzieren. Dazu erinnern wir uns zunächst daran, was Differenzierbarkeit im Eindimensionalen bedeutet:

Rein formal betrachtet ist $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in einem Punkt $x \in (a,b)$, wenn der Grenzwert

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert, und sein Wert wird als Ableitung von f im Punkt x bezeichnet.

Dies können wir auch so formulieren, daß für $h \to 0$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + o(h)$$

ist, wobei die auf EDMUND GEORG HERMANN LANDAU (1877–1938) zurückgehende Notation $o(h)$ einfach bedeuten soll, daß dieser Term für $h \to 0$ *schneller* als h gegen Null geht, d.h.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - \big(f(x) + hf'(x)\big)}{h} = 0\,.$$

Für kleine h ist daher

$$f(x+h) \approx f(x) + hf'(x)\,,$$

d.h. die Funktion sieht in einer hinreichend kleinen Umgebung von x aus wie eine lineare Funktion; die Abbildungen 5 bis 8 zeigen dies für $f(x) = \sin x$ in der Umgebung von $x = 1$, wobei diese Umgebung von einer Abbildung zur nächsten jeweils um den Faktor fünf vergrößert wird.

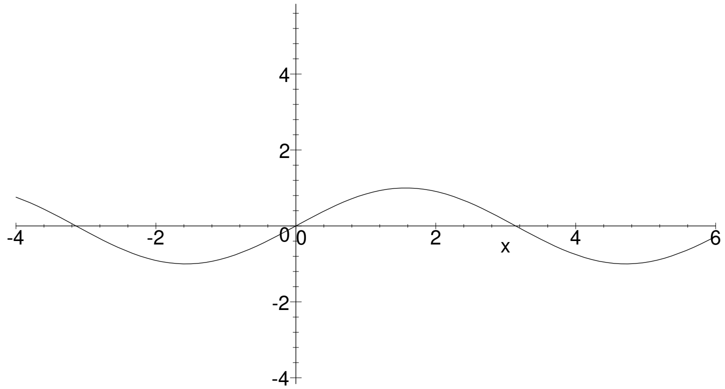


Abb. 5: Graph der Funktion $y = \sin x$

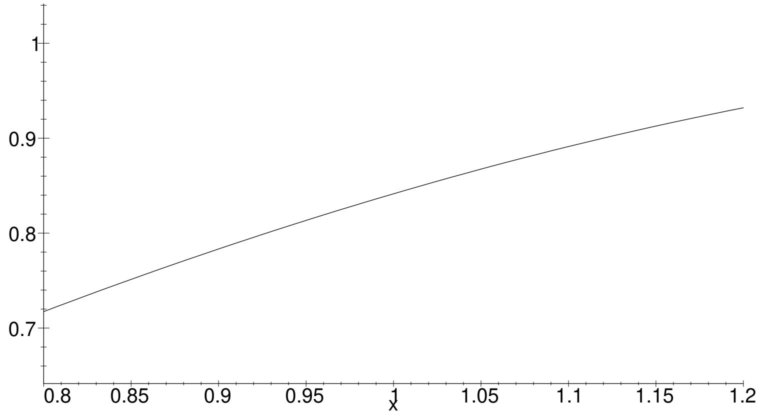


Abb. 6: Vergrößerung um den Faktor fünf um $\big(1, \sin(1)\big)$

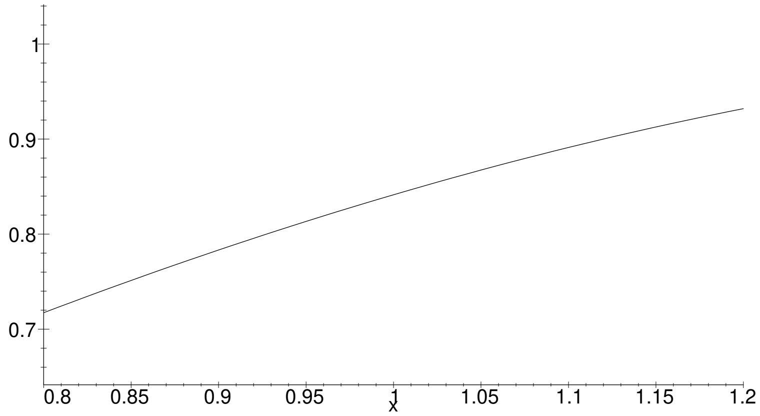


Abb. 7: Nochmalige Vergrößerung um den Faktor fünf um $\big(1, \sin(1)\big)$

Im Zweidimensionalen können wir ganz entsprechend vorgehen: Wenn wir etwa die Funktion $f(x, y) = \sin x \cos y$ auf $\mathbb{R}^2$ in der Umgebung des Punktes $(1, 1)$ betrachten und diese wieder sukzessive um den Faktor fünf vergrößern, erhalten wir die Abbildungen 9 bis 12, die zeigen, daß sich der Graph der Funktion in einer hinreichend kleinen Umgebung des betrachteten Punktes nur wenig von einer Ebenen unterscheidet, d.h. die

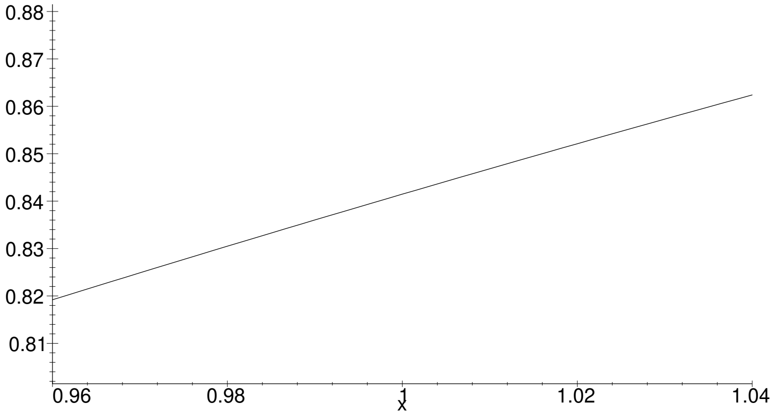


Abb. 8: Nach noch einer Vergrößerung sieht die Funktion praktisch linear aus

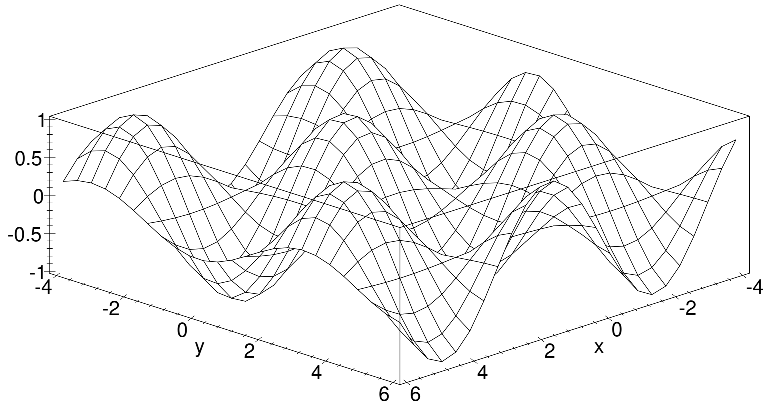


Abb. 9: Graph der Funktion $z = \sin x \cos y$

Funktion ist dort annähernd linear.

Eine lineare Funktion zweier Veränderlicher hat die Form

$$L(x, y) = a + bx + cy;$$

also ist

$$L(x + h, y + k) = a + b(x + h) + c(y + k) = (a + bx + cy) + ah + bk$$

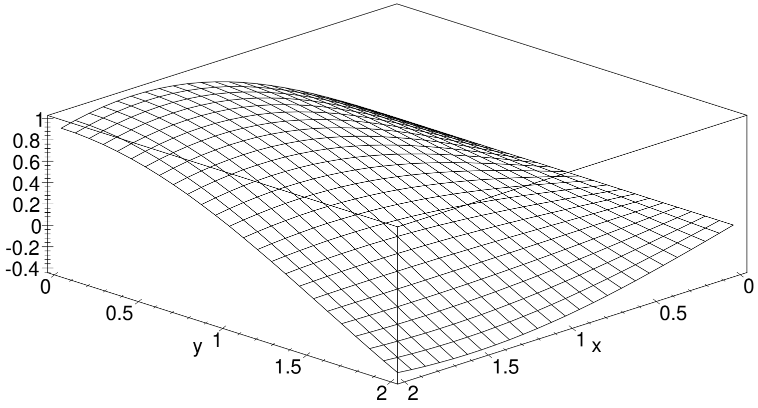


Abb. 10: Vergrößerung um den Faktor fünf um $\big(1, 1, \sin(1)\cos(1)\big)$

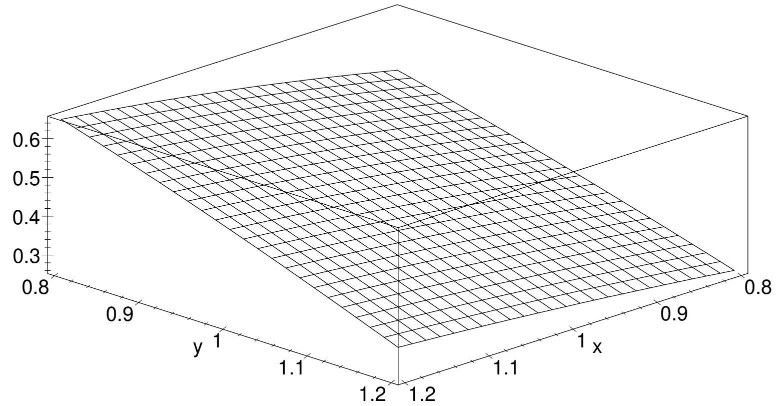


Abb. 11: Nochmalige Vergrößerung um den Faktor fünf um $\big(1, 1, \sin(1)\cos(1)\big)$

eine Approximation für f in der Umgebung des betrachteten Punkts (x, y), hier gleich $(1, 1)$. Im Punkt (x, y) sollte

$$L(x, y) = a + bx + cy$$

natürlich mit $f(x, y)$ übereinstimmen, und für $(h, k) \neq (0, 0)$ sollte der Unterschied zwischen f und L schneller gegen Null gehen als der Ab-

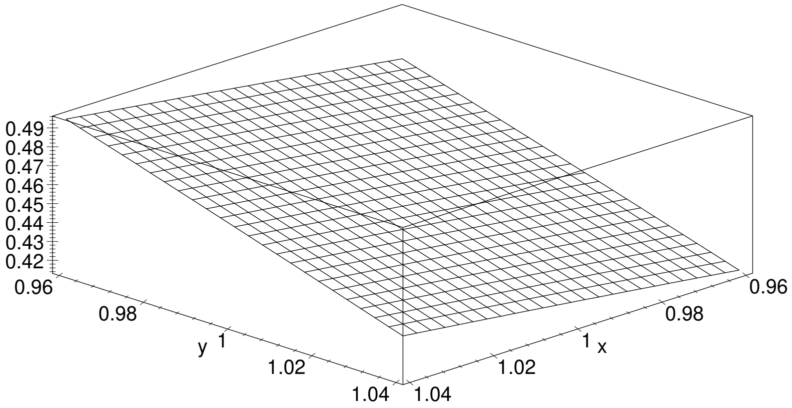


Abb. 12: Nach noch einer Vergrößerung sieht die Funktion praktisch linear aus

stand zwischen $(x+h, y+k)$ und (x, y), d.h. schneller als $\sqrt{h^2+k^2}$. Wir erwarten also, daß

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + ah + bk + o(\sqrt{h^2+k^2})$$

ist und definieren dementsprechend

Definition: *a)* Die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *differenzierbar* im Punkt $\mathbf{x} \in D$, wenn es eine lineare Funktion $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gibt, so daß für $\vec{h} \to 0$ gilt

$$f(\mathbf{x} + \vec{h}) = f(\mathbf{x}) + L\big(\vec{h}\big) + o\big(|\vec{h}|\big) .$$

b) Ist für $\vec{h} = {}^t(h_1, \ldots, h_n)$

$$L\big(\vec{h}\big) = \gamma_1 h_1 + \cdots + \gamma_n h_n ,$$

so bezeichnen wir den Vektor

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \underset{\text{def}}{=} \nabla f(\mathbf{x}) \underset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$

als *Gradient* von f im Punkt $\mathbf{x} \in D$.

Das Symbol ∇ sieht zwar aus wie ein griechischer Buchstabe, ist aber keiner; es ist ein auf den Kopf gestelltes großes Delta (Δ). ∇f wird „Nabla f“ ausgesprochen nach dem griechischen Wort $\nu\alpha\beta\lambda\alpha$ = Leier; die Bezeichnung wurde eingeführt von WILLIAM ROWEN HAMILTON (1805–1865), den die Form von ∇ an eine Leier erinnerte.

Mit obiger Definition haben wir etwas ähnliches wie die Definition

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

für Funktionen einer Veränderlicher: Auf diese Weise ist die Ableitung zwar *definiert,* aber sie wird – außerhalb von Anfängervorlesungen – praktisch nie so ausgerechnet. Entsprechend sollten wir auch für Funktionen mehrerer Veränderlicher eine effizientere Methode der Differentiation finden.

Am einfachsten wäre es, wenn wir den wohlbekannten Kalkül der Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlicher benutzen könnten, also versuchen wir, aus einer Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ Funktionen einer Veränderlichen zu machen. Trotz der schlechten Erfahrungen beim obigen Beispiel einer unstetigen Funktion bietet sich hier an, die Funktion auf eine Gerade einzuschränken.

Eine Gerade durch einen gegebenen Punkt $\mathbf{x}$ ist eindeutig festgelegt durch einen Richtungsvektor $\vec{e}$, wobei umgekehrt der Vektor $\vec{e}$ durch die Gerade natürlich *nicht* eindeutig festgelegt ist: Jedes Vielfache von $\vec{e}$ (außer dem Nullvektor) definiert genau dieselbe Gerade.

Wenn wir die Einschränkung von f auf eine solche Gerade mit Richtungsvektor $\vec{e}$ betrachten, betrachten wir konkret die Funktion

$$g(t) = f(\mathbf{x} + t\vec{e})\,,$$

die überall dort definiert ist, wo $\mathbf{x} + t\vec{e}$ im Definitionsbereich D von f liegt, für eine offene Menge D also zumindest in einem gewissen offenen Intervall um den Nullpunkt der reellen Geraden.

Damit können wir nach der Differenzierbarkeit dieser Funktion für $t = 0$ fragen; falls sie differenzierbar ist, bezeichnen wir die Ableitung

$$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\vec{e}) - f(\mathbf{x})}{h}$$

als *Richtungsableitung* von f in Richtung $\vec{e}$. Eine einfache Anwendung der Kettenregel, die jeder Leser am Rand des Skriptums kurz durchführen sollte, zeigt, daß diese „Richtungsableitung“ nicht nur von der *Richtung* des Vektors $\vec{e}$ abhängt, sondern auch von dessen *Länge:* Beispielsweise ist für $h(t) = f(\mathbf{x} + 2t\vec{e})$

$$h'(0) = 2g'(0)\,.$$

Speziell können wir diese Richtungsableitungen betrachten für den Fall, daß $\vec{e}$ ein *Einheitsvektor* ist (genau ist der Grund für die Bezeichnung $\vec{e}$), beispielsweise einer der Koordinateneinheitsvektoren

$$\vec{e}_i = {}^t(0, \ldots, 1, \ldots, 0)\,,$$

bei dem in der i-ten Zeile eine Eins steht und sonst lauter Nullen.

Alsdann ist für $g_i(t) = f(\mathbf{x} + t\vec{e}_i)$

$$\begin{aligned} g_i'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\vec{e}_i) - f(\mathbf{x})}{h} \\ &= \frac{f(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h} \end{aligned}$$

die Ableitung jener Funktion, die nur von x_i abhängt, während alle anderen Koordinaten x_j festgehalten werden. Diese Ableitung, so sie existiert, bezeichnen wir als *partielle Ableitung*

$$f_{x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$$

von f nach x_i; das Symbol ∂ wird, wenn überhaupt, als „del“ ausgesprochen, wobei *del* natürlich eine Abkürzung für *delta* ist. Partielle Ableitungen, so sie existieren, lassen sich nach den üblichen Regeln der Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen berechnen, sind also für „gutartige“ Funktionen problemlos.

Falls die Funktion f in $\mathbf{x} \in D$ differenzierbar ist und D eine Umgebung von $\vec{x}$ enthält (was für offenes D immer der Fall ist), existiert auch jede Richtungsableitung, denn da dann für jeden Vektor $\vec{h}$ gilt

$$f\left(\mathbf{x} + \vec{h}\right) = f(\mathbf{x}) + L\left(\vec{h}\right) + o\left(\left|\vec{h}\right|\right)\,,$$

ist insbesondere auch

$$f\left(\mathbf{x}+t\vec{e}\right) = f(\mathbf{x}) + L\left(t\vec{e}\right) + o\left(\left|\vec{h}\right|\right) = f(\mathbf{x}) + tL\left(\vec{e}\right) + o(t)\,;$$

denn $L\left(\vec{e}\right)$ und $\left|\vec{h}\right|$ sind schließlich Konstanten. Damit existiert

$$\frac{d}{dt} f\left(\mathbf{x}+t\vec{e}\right)_{|t=0} = L\left(\vec{e}\right)$$

für jeden Richtungsvektor $\vec{e}$; insbesondere existieren natürlich alle partiellen Ableitungen.

Die Umkehrung gilt leider nicht immer: Bei der (offensichtlich in $(0,0)$ unstetigen) Funktion

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } xy \neq 0 \\ 0 & \text{falls } xy = 0 \end{cases} \end{cases}$$

ist Null auf der x-Achse und der y-Achse, und eins überall sonst. Damit existieren im Punkt $(0,0)$ beide partielle Ableitungen und sind identisch Null. Trotzdem ist f natürlich nicht differenzierbar in $(0,0)$, denn da $f(h,k)$ für jeden Punkt, der nicht auf einer der beiden Koordinatenachsen liegt, gleich eins ist, kann es keine Linearform $L(h,k) = bh + ck$ geben, so daß

$$f(h,k) = f(0,0) + L(h,k) + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right) = o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$$

ist, denn $L(0,0) = 0$ und $f(h,k) = 1$ für $hk \neq 0$.

Nun wird natürlich jeder vernünftige Mensch einwenden, daß dieses Beispiel sehr künstlich ist, und in der Tat verhalten sich „gutartige" Funktionen nicht so:

Lemma: Falls $f\colon D \to \mathbb{R}$ auf der offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ stetig ist und auch alle partiellen Ableitungen von f dort existieren und stetig sind, ist f in D differenzierbar und

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Beweis: Sei $\mathbf{x} \in D$. Da D offen ist, gibt es eine Kugel um $\mathbf{x}$, die ganz in D liegt; wir betrachten im folgenden nur Vektoren $\vec{h}$, deren Länge höchstens gleich dem Radius dieser Kugel ist, so daß $\mathbf{x} + \vec{h}$ stets in D liegt.

Wir betrachten f zunächst nur als Funktion der ersten Variablen; da deren Ableitung f_{x_1} in ganz D existiert, ist

$$\begin{aligned} &f(\mathbf{x}+\vec{h}) = f(x_1+h_1,\dots,x_n+h_n) \\ &= f(x_1, x_2+h_2,\dots,x_n+h_n) + f_{x_1}(x_1,x_2+h_2,\dots,x_n+h_n)h_1 + o(h_1)\,. \end{aligned}$$

Genauso ist, da die partielle Ableitung nach x_2 in ganz D existiert,

$$\begin{aligned} &f(x_1,x_2+h_2,\dots,x_n+h_n) = \\ &f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n+h_n) + f_{x_2}(x_1,x_2,x_3+h_3\dots,x_n+h_n)h_2 + o(h_2) \end{aligned}$$

und so weiter. Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}+\vec{h}) = f(\mathbf{x}) &+ f_{x_1}(x_1,x_2+h_2,x_3+h_3,\dots x_n+h_n)h_1 + o(h_1) \\ &+ f_{x_2}(x_1,x_2,x_3+h_3,\dots,x_n+h_n)h_2 + o(h_2) \\ &\ \ \vdots \\ &+ f_{x_{n-1}}(x_1,\dots,x_{n-1},x_n+h_n)h_{n-1} + o(h_{n-1}) \\ &+ f_{x_n}(x_1,\dots,x_n)h_n + o(h_n)\,. \end{aligned}$$

Die LANDAU-Symbole $o(h_1),\dots,o(h_n)$ können wir zu $o\left(\left|\vec{h}\right|\right)$ zusammenfassen, denn da $\left|h_i\right| \le \left|\vec{h}\right|$ für jedes i, kann keines der h_i langsamer gegen Null gehen als $\left|\vec{h}\right|$.

Damit sind wir schon ziemlich nahe an dem, was wir für die Differenzierbarkeit brauchen; allerdings hängen die partiellen Ableitungen noch von den h_i ab, so daß die Differenz zwischen $f(\mathbf{x}+\vec{h})$ und $f(\mathbf{x})$ nicht durch eine lineare Funktion angenähert ist.

Hier kommt nun die Stetigkeit der partiellen Ableitungen ins Spiel: Diese impliziert, daß

$$\lim_{\vec{h}\to 0} \left(f_{x_1}(x_1,x_2+h_2,\dots,x_n+h_n) - f_{x_1}(x_1,x_2,\dots,x_n)\right) = 0$$

ist. Damit ist

$$\big(f_{x_1}(x_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) - f_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n)\big)h_1 = o\big(|\vec{h}|\big)\,,$$

denn wenn h_1 mit einem Ausdruck multipliziert wird, der gegen Null geht, strebt das Produkt für $\vec{h} \to 0$ schneller gegen Null als h_1 allein, und $o(h_1)$ kann durch $o\big(|\vec{h}|\big)$ abgeschätzt werden. Also ist

$$\begin{aligned} &f_{x_1}(x_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n)h_1 \\ =&f_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n)h_1 + o\big(|\vec{h}|\big) = f_{x_1}(\mathbf{x})h_1 + o\big(|\vec{h}|\big)\,. \end{aligned}$$

Entsprechend können wir auch bei den übrigen partiellen Ableitungen argumentieren und erhalten insgesamt, daß

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + \vec{h}) &= f(\mathbf{x}) + f_{x_1}(\mathbf{x})h_1 + \cdots + f_{x_n}(\mathbf{x})h_n + o\big(|\vec{h}|\big) \\ &= f(\mathbf{x}) + \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \vec{h} + o\big(|\vec{h}|\big) \end{aligned}$$

ist. Damit ist das Lemma bewiesen. ∎

Für Funktionen mit stetigen partiellen Ableitungen ist der Gradient also gerade der Vektor der partiellen Ableitungen; er kann damit über die bekannten Ableitungsregeln für Funktionen einer Veränderlichen berechnet werden.

NB: Häufig wird der Gradient durch diese Formel *definiert;* in diesem Fall folgt natürlich aus der Existenz des Gradienten nicht die Differenzierbarkeit der Funktion; siehe obiges Beispiel einer unstetigen Funktion, für die alle partiellen Ableitungen in $(0,0)$ existieren.

Obiges Lemma liefert einen ersten Ansatz für grobe Näherungsformeln, wie sie aus der Analysis einer Veränderlichen bekannt sind: Für hinreichend kurze Vektoren $\vec{h}$ kann man einen Fehler der Größenordnung $o\big(|\vec{h}|\big)$ in erster Näherung vernachlässigen und erhält die Formel

$$f(\mathbf{x} + \vec{h}) \approx f(\mathbf{x}) + \operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \cdot \vec{h}\,,$$

die auch für eine einfache Fehlerrechnung benutzt werden kann: Bestimmt man etwa einen Widerstand durch Messung von Spannung U und Stromstärke I, wobei die beiden Messungen jeweils mit einem kleinen Fehler ΔU *bzw.* ΔI behaftet sind, so ist mit $R = f(U, I) = U/I$

$$\begin{aligned} f(U + \Delta U, I + \Delta I) &\approx f(U, I) + f_U(U, I)\Delta U + f_I(U, I)\Delta I \\ &= \frac{U}{I} + \frac{\Delta U}{I} - \frac{U\Delta I}{I^2} = R + \frac{\Delta U}{I} - R\frac{\Delta I}{I}\,, \end{aligned}$$

der Fehler ist also

$$\Delta R \approx \frac{\Delta U}{I} - R\frac{\Delta I}{I}\,.$$

Das Problem hierbei ist natürlich, daß die Fehler ΔU und ΔI unbekannt sind und höchstens bezüglich ihrer absoluten Größe einigermaßen geschätzt werden können; immerhin gibt eine solche Formel aber eine erste Übersicht darüber, wie start Meßfehler auf ein Ergebnis durchschlagen. Im nächsten Paragraphen werden wir bessere Methoden kennenlernen.

Nächstes Ziel dieses Paragraphen sind höhere Ableitungen von Funktionen mehrerer Veränderlicher. Wir lassen uns bei der Definition wieder vom eindimensionalen Fall leiten: Für eine zweimal differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + o(h^2)\,;$$

mit Hilfe der zweiten Ableitung läßt sich die Funktion also nicht nur linear, sondern auch durch eine quadratische Funktion approximieren; der Approximationsfehler wird dadurch naturgemäß kleiner und geht jetzt für $h \to 0$ sogar schneller gegen Null als h^2.

Im Mehrdimensionalen mußten wir den Term $hf'(x)$ ersetzen durch eine lineare Funktion

$$L(\vec{h}) = \vec{a} \cdot \vec{h} \quad \text{mit} \quad \vec{a} = \operatorname{grad} f\,;$$

entsprechend müssen wir nun den Term $\frac{h^2}{2}f''(x)$ ersetzen durch eine quadratische Funktion

$$Q(\vec{h}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}h_ih_j = {}^t\vec{h}A\vec{h} \quad \text{mit} \quad A = (a_{ij})\,.$$

Die Matrix A können wir dabei als symmetrisch ansetzen, denn da $h_ih_j = h_jh_i$ ist, ändert sich nichts an der Summe, wenn wir a_{ij} und a_{ji} beide durch ihr arithmetisches Mittel ersetzen:

$$a_{ij}h_ih_j + a_{ji}h_jh_i = \frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}h_ih_j + \frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}h_jh_i\,.$$

Definition: Die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt zweifach differenzierbar im Punkt $\mathbf{x} \in D$, wenn es eine Linearform $L(\vec{h}) = \vec{a}\cdot\vec{h}$ und eine quadratische Form $Q(\vec{h}) = {}^t\vec{h}A\vec{h}$ gibt, so daß

$$f(\mathbf{x}+\vec{h}) = f(\mathbf{x}) + L(\vec{h}) + \frac{1}{2}Q(\vec{h}) + o\bigl(|\vec{h}|^2\bigr)$$

ist. Die Matrix A, so sie als symmetrische Matrix gewählt wird, heißt dann HESSE-Matrix von f im Punkt $\mathbf{x}$ und wird mit $H_f(\mathbf{x})$ bezeichnet.

Genau wie der Gradient bei gutartigen Funktionen durch die partiellen Ableitungen berechnet werden kann, sollte auch die HESSE-Matrix durch Differentiationsverfahren aus der Analysis einer Veränderlichen berechenbar sein. Das Hilfsmittel dazu sind die zweiten partiellen Ableitungen:

Für eine in ganz D partiell differenzierbare Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ ist auch jede partielle Ableitung f_{x_i} wieder eine Funktion von D nach $\mathbb{R}$, und auch diese kann wieder partiell differenzierbar sein. Falls ja, bezeichnen wir die partielle Ableitung von f_{x_i} nach x_j als zweite partielle Ableitung

$$f_{x_ix_j} \underset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \underset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

von f nach x_i und x_j. Im Fall $i = j$ schreiben wir kurz

$$f_{x_ix_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\,.$$

Analog lassen sich auch höhere partielle Ableitungen einführen durch die Definition

$$f_{x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}} \underset{\text{def}}{=} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}\dots\partial x_{i_2}\partial x_{i_1}} \underset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}}\cdots\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\,.$$

Als erstes Beispiel können wir etwa die zweiten partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x,y) = x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 4xy^3 + 5y^4$$

berechnen: Die partielle Ableitung nach x ist

$$f_x(x,y) = 4x^3 + 6x^2y + 6xy^2 + 4y^3\,,$$

also ist

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 + 12xy + 6y^2 \quad \text{und}$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 6x^2 + 12xy + 12y^2\,.$$

Entsprechend ist

$$f_y(x,y) = 2x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 20y^3\,,$$

also

$$f_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6x^2 + 12xy + 12y^2 \quad \text{und}$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6x^2 + 24xy + 60y^2\,.$$

Insbesondere ist also zumindest in diesem Fall $f_{xy} = f_{yx}$.

Diese Formel gilt, wie wir gleich sehen werden, *fast* immer; zunächst soll aber ein Gegenbeispiel zeigen, daß sie nicht immer gilt: Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{cases}.$$

Für $(x,y) \neq (0,0)$ gibt es keinerlei Probleme mit der Differenzierbarkeit, und auch im Nullpunkt existieren alle partiellen Ableitungen, denn da $f(x,0)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $f(0,y)$ für alle $y \in \mathbb{R}$ verschwindet, ist

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0\,.$$

Für $(x,y) \neq (0,0)$ liefern die üblichen Ableitungsregeln, daß

$$f_x(x,y) = y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) \quad \text{und}$$

$$f_y(x,y) = x\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

ist. Auch diese Funktionen sind im Nullpunkt nicht definiert; um die zweiten partiellen Ableitungen in $(0,0)$ zu berechnen, müssen wir daher auf die Definition des Differentialquotienten zurückgehen:

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h^3}{h^3} = -1 \quad \text{und}$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{+h^3}{h^3} = +1\,,$$

die beiden gemischten partiellen Ableitungen stimmen also nicht überein.

Das angekündigte positive Resultat stammt von HERMANN AMANDUS SCHWARZ (1843–1921) und besagt

Lemma: $f\colon D \to \mathbb{R}$ sei auf der offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ erklärt und alle zweiten partiellen Ableitungen seien stetig auf D. Dann ist

$$f_{x_i x_j}(\mathbf{x}) = f_{x_j x_i}(\mathbf{x})$$

für alle $\mathbf{x} \in D$ und alle i,j mit $1 \le i,j \le n$.

Beweis: Da bei der partiellen Differentiation alle Variablen außer einer als konstant betrachtet werden, können wir uns auf den Fall $n = 2$ beschränken: Wir interessieren uns nur für die beiden Variablen x_i und x_j, die wir als x und y bezeichnen (wenn sie verschieden sind – andernfalls gibt es aber ohnehin nichts zu beweisen), und betrachten alle sonstigen x_k als konstant.

Für den Punkt (x,y) aus D wählen wir dann $h,k \in \mathbb{R}$ so, daß das Quadrat mit den vier Ecken

$$(x,y),\ (x+h,y),\ (x,y+k) \quad \text{und} \quad (x+h,y+k)$$

vollständig in D liegt; dies ist möglich, da wir D als offene Menge vorausgesetzt haben.

Nach Definition ist

$$f_{xy}(x,y) = \lim_{k\to 0} \frac{f_x(x,y+k) - f_x(x,y)}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h,y+k) - f(x,y+k)}{h} - \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}}{k}\,.$$

Falls alle Grenzübergänge miteinander vertauschbar sind (was, wie wir im obigen Gegenbeispiel gesehen haben, keineswegs selbstverständlich ist), ist das ein Limes über den Ausdruck

$$\frac{f(x+h,y+k) - f(x,y+k) - f(x+h,y) + f(x,y)}{hk}$$

für $h,k \to 0$; es liegt also nahe, sich diesen Ausdruck genauer anzuschauen.

Für den Beweis wird es genügen, wenn wir uns auf den Fall $h = k$ beschränken; wir werden den Ausdruck

$$D(h) = \frac{f(x+h,y+h) - f(x,y+h) - f(x+h,y) + f(x,y)}{h^2}$$

auf zwei Arten ausrechnen:

Zunächst fassen wir, wie oben, die beiden ersten und die beiden letzten Summanden zusammen: Mit der Abkürzung

$$g(y) = \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

ist dann

$$D(h) = \frac{g(y+h) - g(y)}{h}\,.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist dieser Differenzenquotient gleich dem Differentialquotient $g'(\eta)$ für eine (von h abhängige) Zahl η zwischen y und $y+h$. Somit ist

$$D(h) = g'(\eta) = \frac{f_y(x+h,\eta) - f_y(x,\eta)}{h} = f_{yx}(\xi,\eta)$$

für ein η zwischen x und $x+h$, denn natürlich können wir auch auf diesen Differenzenquotienten den Mittelwertsatz anwenden.

Für die zweite Berechnung fassen wir in $D(h)$ den ersten und den dritten sowie den zweiten und den vierten Term zusammen. Mit der Abkürzung

$$\widetilde{g}(x) = \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

ist dann dieses Mal

$$D(h) = \frac{\widetilde{g}(x+h) - \widetilde{g}(y)}{h}\,,$$

und nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es dazu ein $\widetilde{\xi}$ zwischen x und $x+h$, so daß dies gleich $\widetilde{g}'(\widetilde{\xi})$ ist. Also ist

$$D(h) = \widetilde{g}'(\widetilde{\xi}) = \frac{f_x(\widetilde{\xi}, y+h) - f_x(\widetilde{\xi}, y)}{h} = f_{xy}(\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta})$$

für eine Zahl $\widetilde{\eta}$ zwischen y und $y+h$. Somit haben wir gezeigt, daß

$$D(h) = f_{yx}(\xi,\eta) = f_{xy}(\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta})$$

ist.

Lassen wir nun h gegen Null gehen, konvergieren ξ und $\widetilde{\xi}$ gegen x und η wie auch $\widetilde{\eta}$ gegen y. Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der zweiten partiellen Ableitungen konvergiert daher $f_{yx}(\xi,\eta)$ gegen $f_{yx}(x,y)$ und $f_{xy}(\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta})$ gegen $f_{xy}(x,y)$, d.h. der Grenzwert existiert und

$$D(0) = f_{yx}(x,y) = f_{xy}(x,y)\,.$$

Damit ist das Lemma bewiesen. ■

Ein analoger Satz gilt natürlich auch für höhere partielle Ableitungen; für k-fache Ableitungen müssen wir entsprechend voraussetzen, daß die k-fachen partiellen Ableitungen existieren und stetig sind.

Definition: Für eine offene Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ bezeichne $\mathcal{C}^k(D,\mathbb{R})$ die Menge aller Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$, deren sämtliche partielle Ableitungen bis zu den k-ten existieren und stetig sind. Für $k=0$ sei $\mathcal{C}^0(D,\mathbb{R})$ einfach die Menge aller stetiger Funktionen $D \to \mathbb{R}$.

Man überlegt sich sofort, daß $\mathcal{C}^k(D,\mathbb{R})$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, und es ist auch nicht schwer einzusehen, daß die Funktionen aus $\mathcal{C}^k(D,\mathbb{R})$ alle die Eigenschaften haben, die man bei der Betrachtung von k-ten Ableitungen wünscht:

Erstens ist die Berechnung einer k-ten partiellen Ableitung von der Reihenfolge der partiellen Differentiationen unabhängig: Wie wir aus der HM I wissen (Kapitel 2, §7*c*), kann jede Permutation als Produkt von Transpositionen geschrieben werden; es genügt also zu zeigen, daß man die Reihenfolge zweiter partieller Differentiationen vertauschen kann, d.h.

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_r}} \frac{\partial}{\partial x_{i_{r+1}}} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_{r+1}}} \frac{\partial}{\partial x_{i_r}} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_{i_k}}\,.$$

Für $f \in \mathcal{C}^k(D,\mathbb{R})$ ist sichergestellt, daß

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_{r+2}}} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_{i_k}} \in \mathcal{C}^2(D,\mathbb{R})\,;$$

nach obigem Lemma ist daher

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_r}} \frac{\partial}{\partial x_{i_{r+1}}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{r+2}}} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_{i_k}} \right) = \frac{\partial}{\partial x_{i_{r+1}}} \frac{\partial}{\partial x_{i_r}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{r+2}}} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_{i_k}} \right)\,.$$

Differenziert man hier beide Seiten noch partiell nach x_1 bis x_{r-1}, ändert dies natürlich nichts an der Gleichheit.

Zweitens besagt das vorletzte Lemma, daß eine Funktion $f \in \mathcal{C}^1(D,\mathbb{R})$ differenzierbar ist. Eine naheliegende Verallgemeinerung des dortigen Beweises, bei der man anstelle von linearen Approximationen solche höherer Ordnung betrachtet, zeigt, daß eine Funktion $f \in \mathcal{C}^2(D,\mathbb{R})$ zweifach differenzierbar ist, und daß entsprechend eine Funktion f aus $\mathcal{C}^k(D,\mathbb{R})$ bis auf einen Fehler der Größenordnung $o\bigl(|\vec{h}|^k\bigr)$ durch ein Polynom k-ten Grades approximiert werden kann. (Wie das im einzelnen aussieht, wollen wir uns lieber nicht so genau anschauen: Eine Form vom Grad k ist gegeben durch eine k-fache Summation von 1 bis n, hat also n^k Summanden, was recht schnell unübersichtlich wird.)

Die Aussage, daß eine Funktion $f \in \mathcal{C}^k(D,\mathbb{R})$ bis auf Fehler der Größenordnung $o\bigl(|\vec{h}|^k\bigr)$ durch ein Polynom approximiert werden kann, ist natürlich das mehrdimensionale Analogon der TAYLOR-Entwicklung im Eindimensionalen; wir können TAYLOR-Polynome einigermaßen übersichtlich hinschreiben, wenn wir Richtungsableitungen benutzen: Die Richtungsableitung von f in Richtung $\vec{v}$ ist nach Definition die Ableitung der Funktion einer Veränderlichen

$$g\colon \begin{cases} (-a,a) & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto f(\mathbf{x}+t\vec{v}) \end{cases}$$

mit geeignet gewähltem $a \in \mathbb{R}_+$ nach t für $t = 0$; wir können sie berechnen als Skalarprodukt des Gradienten mit dem Vektor $\vec{v}$.

Natürlich können wir g nicht nur einmal ableiten; für $f \in \mathcal{C}^k(D,\mathbb{R})$ existiert das TAYLOR-Polynom k-ten Grades

$$g(h) = g(0) + h \cdot g'(0) + \frac{h^2}{2} g''(0) + \cdots + \frac{h^k}{k!} g^{(k)}(0) + o(h^k)\,.$$

Führen wir nun für die Richtungsableitung in Richtung $\vec{v}$ einen Operator $\partial_{\vec{v}}$ ein durch

$$\partial_{\vec{v}} f(x) = \operatorname{grad} f(x) \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \cdot v_i\,,$$

so wird dies zu

$$f(\mathbf{x}+h\vec{v}) = f(\mathbf{x}) + h\partial_{\vec{v}} f(\mathbf{x}) + \cdots + \frac{h^k}{k!} \partial_{\vec{v}}^k f(\mathbf{x}) + o(h^k)\,.$$

Speziell für $h = 1$ erhalten wir die kompakte Schreibweise der TAYLOR-Formel, nämlich

$$f(\mathbf{x}+\vec{v}) = f(\mathbf{x}) + \partial_{\vec{v}} f(\mathbf{x}) + \cdots + \frac{1}{k!} \partial_{\vec{v}}^k f(\mathbf{x}) + o\big(|\vec{v}|^k\big)\,.$$

$\partial_{\vec{v}}^k$ steht hierbei natürlich für die k-fache Anwendung des Operators $\partial_{\vec{v}}$; was das explizit bedeutet, sollte man sich anhand obiger Summendarstellung von $\partial_{\vec{v}}$ klarmachen. Insbesondere beachte man, daß alle Potenzprodukte der v_i in den Potenzen des Operatiors $\partial_{\vec{v}}$ stecken und daß diese nach Ausmultiplizieren schnell ziemlich unübersichtlich werden.

Zumindest für $n = 2$ ist alles aber noch einigermaßen handhabbar; hier sehen wir sofort, daß für $f \in \mathcal{C}^2(D,\mathbb{R})$ gilt

$$H_f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix},$$

und nach dem Lemma von SCHWARZ ist dies eine symmetrische Matrix.

Als letztes Thema in diesem Paragraphen wollen wir uns ein weiteres klassisches Thema der Analysis einer Veränderlichen im Mehrdimensionalen ansehen: die Bestimmung von Extremwerten.

Aus der Definition der Differenzierbarkeit folgt unmittelbar

Lemma: Wenn die differenzierbare Funktion $f \in \mathcal{C}^1(D,\mathbb{R})$ im Punkt $\mathbf{x} \in D$ ein lokales Extremum hat, ist dort ihr Gradient gleich dem Nullvektor.

Beweis: Nach Definition der Differenzierbarkeit ist

$$f(\mathbf{x}+\vec{h}) = f(\mathbf{x}) + \operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \cdot \vec{h} + o\big(|\vec{h}|\big)\,.$$

Wäre $\operatorname{grad} f(\mathbf{x})$ ungleich dem Nullvektor, so gäbe es Vektoren $\vec{h}$, für die $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \cdot \vec{h} > 0$ wäre, zum Beispiel alle positiven Vielfachen des Gradienten, und es gäbe Vektoren $\vec{h}$, für die $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \cdot \vec{h} < 0$ wäre, zum Beispiel alle negativen Vielfachen des Gradienten. Damit könnte $f(\mathbf{x})$ weder Maximum noch Minimum sein, da für kleine Vektoren $\vec{h}$ der lineare Term das Restglied $o\big(|\vec{h}|\big)$ dominiert.

■

Die Frage, welche Nullstellen des Gradienten wirklich Extremwerten entsprechen, ist – wie auch schon im Eindimensionalen – schwieriger; in der Praxis wird es meist am einfachsten sein, sich die Umgebung des betreffenden Punktes mit irgendwelchen *ad hoc*-Methoden genauer anzusehen und dann zu entscheiden.

Falls man formal vorgehen möchte, kann man wie im Eindimensionalen ein noch einigermaßen überschaubares *hinreichendes* Kriterium angeben:

Lemma: Falls für $f \in \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R})$ der Gradient im Punkt $\mathbf{x} \in D$ verschwindet, gilt:
a) Falls die HESSE-Matrix $H_f(\mathbf{x})$ positiv definit ist, hat f im Punkt $\mathbf{x}$ ein Minimum.
b) Falls $H_f(\mathbf{x})$ negativ definit ist, hat f im Punkt $\mathbf{x}$ ein Maximum.
c) Falls $H_f(\mathbf{x})$ indefinit ist, hat f im Punkt $\mathbf{x}$ kein Extremum.

Beweis: Für $f \in \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R})$ ist

$$f(\mathbf{x} + \vec{h}) = f(\mathbf{x}) + \operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \cdot \vec{h} + \tfrac{1}{2}{}^t\vec{h} H_f(\vec{x})\vec{h} + o\big(|\vec{h}^2|\big) .$$

Falls der Gradient verschwindet, wird das Verhalten von f in der Umgebung von $\mathbf{x}$ also von der quadratischen Form ${}^t\vec{h} H_f(\vec{x})\vec{h}$ bestimmt. Im positiv definiten Fall nimmt diese in einer gewissen Umgebung von $\mathbf{x}$ nur positive Werte an, $f(\mathbf{x})$ vergrößert sich also unabhängig davon, in welcher Richtung man sich von $\mathbf{x}$ entfernt, und damit muß f in $\mathbf{x}$ ein Minumum haben. Entsprechend muß f für negativ definite HESSE-Matrix ein Maximum haben. Im indefiniten Fall gibt es Richtungen, in denen sich $f(\mathbf{x})$ vergrößert und Richtungen, in denen es sich verkleinert; daher kann in diesem Fall kein Extremum vorliegen. ■

Klassisches Beispiel eines Punkts, in dem der Gradient verschwindet, ohne daß ein Extremwert vorliegt, ist der in Abbildung 13 gezeigte Sattelpunkt, hier dargestellt als Funktionswert über dem Punkt $(0, 0)$ für die Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Für Leser, die lieber nach Kochrezepten vorgehen als selbst zu denken, sei noch kurz erwähnt, wie man die positive oder negative Definitheit einer Matrix feststellen kann. Ein triviales, aber rechnerisch aufwendiges Kriterium ist

Lemma: Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann positiv (negativ) definit, wenn alle ihre Eigenwerte positiv (negativ) sind; sie ist indefinit, wenn es sowohl positive als auch negative Eigenwerte gibt.

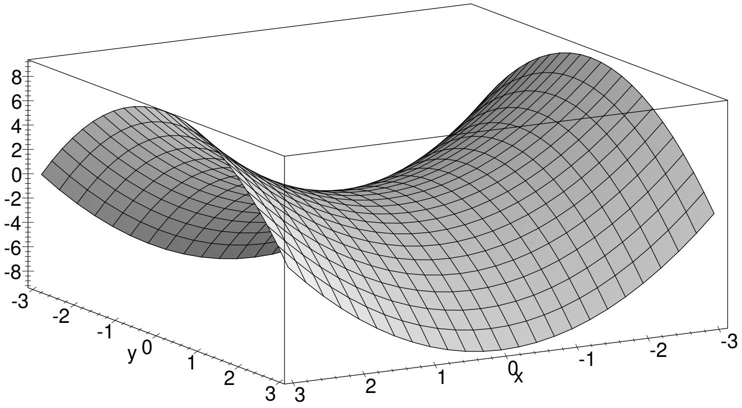


Abb. 13: Graph der Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$

Beweis: Für eine symmetrische Matrix A hat der $\mathbb{R}^n$ eine Basis $\mathfrak{B}$ aus Eigenvektoren von A. Da der Wertebereich einer quadratischen Form in jedem Koordinatensystem derselbe ist, können wir diese Basis zugrundelegen; dort hat A Diagonalgestalt, und die quadratische Form ist

$$Q(\vec{h}) = \lambda_1 h_1^2 + \cdots + \lambda_n h_n^2 .$$

Da die Zahlen h_i^2 nicht negativ werden können und für $h_i \neq 0$ immer positiv sind, folgt die Behauptung. ■

Im Fall $n = 2$ läßt sich dies sogar in ein praktikables Kriterium übersetzen: Die Eigenwerte einer symmetrischen 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

sind die Wurzeln des charakterischen Polynoms

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - b^2 = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - b^2) .$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind

$$\lambda_{1/2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+d}{2}\right)^2 - (ad - b^2)} ;$$

da wir wissen, daß alle Eigenwerte einer symmetrischen Matrix reell sind, kann unter der Wurzel nie eine negative Zahl stehen; wir könnten dies aber auch noch einmal explizit kontrollieren mit der Formel

$$\left(\frac{a+d}{2}\right)^2 - (ad - b^2) = \left(\frac{a-d}{2}\right)^2 + b^2 .$$

Falls $\det A = ad - b^2$ negativ ist, ist die Wurzel betragsmäßg größer als $(a+d)/2$, es gibt also einen positiven und einen negativen Eigenwert, so daß A indefinit ist. Im Falle einer positiven Determinante ist dagegen

$$\left|\sqrt{\left(\frac{a+d}{2}\right)^2 - (ad - b^2)}\right| < \left|\frac{a+d}{2}\right| ,$$

das Vorzeichen beider Eigenwerte ist daher gleich dem von $(a+d)/2$. Außerdem folgt aus

$$\det A = ad - b^2 > 0 ,$$

daß $ad > 0$ sein muß, d.h. a und d haben dasselbe Vorzeichen, das dann natürlich gleich dem Vorzeichen ihres Mittelwerts $(a+d)/2$ sein muß. Damit ergibt sich folgendes Kriterium:

Lemma: Die 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ ist indefinit, falls $\det A < 0$. Im Falle $\det A > 0$ ist A positiv definit für positives a und negativ definit für negatives a.
■

§2: Fehler- und Ausgleichsrechnung

Als erste Anwendung von Maxima und Minima für Funktionen mehrerer Veränderlicher soll hier die Fehler- und Ausgleichsrechnung behandelt werden. Zum genaueren Verständnis dieser Anwendung sind leider Grundkenntnisse der Statistik notwendig, für deren exakte Behandlung wir in dieser Vorlesung keine Zeit haben. Wir müssen uns daher damit begnügen, die wesentlichen Ideen einfach zur Kenntnis zu nehmen; hier im Skriptum sind im Kleindruck zumindest die wichtigsten jener Resultate dargestellt, die in der Vorlesung zu kurz kommen mußten.

a) Fehlerquellen und statistische Kenngrößen

Physikalische Gesetze gelten meist nur unter der Annahme, daß die Umgebungsbedingungen exakt kontrolliert werden können; das ist in der Praxis natürlich nie möglich. Dies gilt insbesondere für die Anwendung physikalischer Prinzipen zur Messung von Daten, so daß die Anzeige eines Meßinstruments in der Praxis nie dem genauen Wert der zu messenden Größe entspricht: Sie ist immer von zahlreichen kleineren Störungen beeinflußt, die man für alle praktischen Zwecke als zufällig betrachten kann.

Zusätzlich kann eine Messung noch durch mehr oder weniger große *systematische* Fehler verfälscht sein; diese können hervorgerufen werden durch ein falsch kalibriertes Meßgerät, durch falsche Anwendung von Meßvorschriften *usw.* Mit diesen systematischen Fehlern wollen wir uns hier nicht beschäftigen; hier soll es nur um die *Zufallsfehler* aus dem vorigen Absatz gehen.

Die Strategie zum Umgang mit Zufallsfehlern ist wohlbekannt: Man begnügt sich nicht mit einer einzigen Messung, sondern mißt dieselbe Größe mehrmals, so daß man eine ganze Meßreihe

$$x_1, x_2, \ldots, x_N$$

erhält. Dann bildet man das *arithmetische Mittel*

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

der Meßreihe in der Hoffnung, daß sich hierbei die Fehler „ausmitteln“, so daß $\overline{x}$ dem theoretisch korrekten Wert $\hat{x}$ nahekommt.

Die Wahl des arithmetischen Mittels läßt sich auch geometrisch begründen: Eine Meßreihe $x_1, \ldots, x_N$ definiert einen Vektor im $\mathbb{R}^n$. Falls es keine Meßfehler gäbe, hätte dieser lauter identische Komponenten. Tatsächlich ist dies natürlich nicht der Fall; wir können aber nach einem Vektor mit identischen Komponenten suchen, der möglichst nahe am Vektor der Meßwerte liegt. Für einen Vektor, dessen sämtliche Komponenten gleich x sind, ist das Quadrat des Abstands zum Vektor der

Meßwerte gleich

$$d(x) = \sum_{i=1}^{N}(x - x_i)^2 = Nx^2 - 2x\sum_{i=1}^{N} x_i + \sum_{i=1}^{N} x_i^2 .$$

Diese quadratische Funktion von x hat ein eindeutig bestimmtes Minimum bei der Nullstelle der Ableitung

$$d'(x) = 2Nx - 2\sum_{i=1}^{N} x_i ,$$

also beim arithmetischen Mittel $\overline{x}$.

Als Maß für die Schwankungen innerhalb der Meßreihe und damit für die Meßfehler könnte man versucht sein, den obigen Abstand zu nehmen; er hat aber den Nachteil, daß er mit steigendem N immer größer wird. Um diesen Effekt zu kompensieren, dividieren wir das Abstandsquadrat noch durch N und definieren die *mittlere quadratische Abweichung* oder *Varianz* der Meßreihe als

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\overline{x} - x_i)^2 .$$

Die (nichtnegative) Quadratwurzel σ hieraus heißt *Standardabweichung* der Meßreihe. Das Ergebnis einer Messung wird meist angegeben in der Form

$$x = \overline{x} \pm \sigma ,$$

man betrachtet also die Standardabweichung der Meßreihe als Maß für den Meßfehler.

Warum betrachten wir eigentlich quadratische Abweichungen und nicht die einfacheren linearen Abweichungen? Nun, der Mittelwert aller Abweichungen ist

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i - \frac{1}{N}N\overline{x} = \overline{x} - \overline{x} = 0 ,$$

also ist dies keine geeignete Maßzahl. Möglich wäre die mittlere *betragsmäßige* Abweichung

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|x_i - \overline{x}| ,$$

allerdings wird die im allgemeinen nicht für das arithmetische Mittel $\bar{x}$ minimal, sondern, wie man sich leicht überlegen kann, für jede Zahl $\overline{x}$ mit der Eigenschaft, daß gleichviele Meßwerte größer und kleiner als $\overline{x}$ sind; einen solchen Wert $\overline{x}$ bezeichnet man als *Median* der Meßreihe. Für die Beschreibung wirtschafts- und sozialwissenschaftlicher Daten ist dieser Median meist eine aussagekräftigere Kennzahl als das arithmetische Mittel; in den Naturwissenschaften und der Technik spielt er allerdings keine große Rolle.

b) Das Laplacesche Fehlermodell

Der französiscche Mathematiker PIERRE SIMON, MARQUIS DE LAPLACE (1749–1827) entwickelte ein extrem vereinfachtes Modell für das Zustandkommen zufälliger Meßfehler. Trotz seiner unrealistischen Annahmen ist es immer noch auch für die Praxis sehr interessant, da man inzwischen weiß, daß auch sehr viel kompliziertere realistische Fehlerquellen dasselbe Verhalten zeigen, das LAPLACE aus seinem Modell ableitete.

Die Grundannahme des LAPLACEschen Fehlermodells können wir uns so vorstellen, daß eine große Anzahl von „Dämonen“ (oder Fehlerquellen) unsere Meßergebnisse verfälschen; jeder einzelne dieser „Dämonen“ verursacht einen Fehler derselben Größe ε in positiver oder negativer Richtung, wobei die Wahrscheinlichkeit für $+\varepsilon$ *bzw.* $-\varepsilon$ für jeden der „Dämonen“ jeweils 50% sein soll und die einzelnen „Dämonen“ unabhängig voneinander handeln sollen.

Im Falle eines einzigen „Dämonen“ wäre der Fehler also mit gleicher Wahrscheinlichkeit $+\varepsilon$ oder $-\varepsilon$, bei zwei „Dämonen“ wäre er in jeweils 25% aller Fälle $+2\varepsilon$ oder -2ε, während sich in 50% der Fälle die beiden Fehler aufheben würden.

Allgemein gibt es bei n „Dämonen“ 2^n gleichwahrscheinliche Möglichkeiten für deren Verhalten; die folgende Tabelle zeigt für $n \leq 5$ jeweils die Anzahl der Fälle, die zu dem in der Kopfzeile angegebenen Gesamtfehler führen:

	-5ε	-4ε	-3ε	-2ε	$-\varepsilon$	0	$+\varepsilon$	$+2\varepsilon$	$+3\varepsilon$	$+4\varepsilon$	$+5\varepsilon$
$n=0$						1					
$n=1$					1		1				
$n=2$				1		2		1			
$n=3$			1		3		3		1		
$n=4$		1		4		6		4		1	
$n=5$	1		5		10		10		5		1

Diese dreiecksförmige Anordnung von Zahlen bezeichnet man als PASCAL*sches Dreieck.* Offenbar kann man es dadurch rekursiv zeilenweise berechnen, daß man an jede Stelle die Summe der beiden links und rechts darüberstehenden Zahlen schreibt: Die n-te Störung bringt den Fehler genau dann auf $i \cdot \varepsilon$, wenn sie entweder gleich $+\varepsilon$ ist und die ersten $n-1$ Störungen einen Fehler $(i-1)\cdot\varepsilon$ produziert haben, oder aber wenn sie gleich $-\varepsilon$ ist und die ersten $n-1$ Störungen einen Fehler $(i+1)\cdot\varepsilon$ produziert haben. Entsprechend ist auch klar, daß die Summe aller Zahlen in der n-ten Zeile gleich 2^n ist, denn in der nullten Zeile haben wir Summe eins, und da die jeweils neu hinzukommende Störung genau zwei Möglichkeiten hat, verdoppelt sich die Summe von Zeile zu Zeile. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich n Störungen zu $i \cdot \epsilon$ aufsummieren, ist also gerade gleich der Zahl, die in der n-ten Spalte unter $i \cdot \varepsilon$ steht (beziehungsweise Null, wenn dort keine Zahl steht), dividiert durch 2^n.

Bekanntlich kann man die Zahlen in diesem Dreieck auch explizit berechnen: An der n-ten Zeile stehen die $n+1$ Zahlen

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad \text{für} \quad i = 0, \dots, n\,.$$

Wer diese Formel nicht kennt, kann sie leicht durch vollständige Induktion beweisen: Für $n=1$ sowie allgemein für $i=0$ oder $i=n$ ist alles klar; für $n>1$ und $0<i<n$ stehen über $\binom{n}{i}$ die beiden Zahlen $\binom{n-1}{i-1}$ und $\binom{n-1}{i}$, für die in der Tat gilt

$$\binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i} = \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} + \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} = \frac{(n-1)!}{i!(n-i)!}\cdot\bigl(i+(n-i)\bigr) = \frac{n!}{i!(n-i)!} = \binom{n}{i}\,.$$

Falls n gerade ist, treten nur Vielfache von 2ε als Gesamtfehler auf; alle diese Vielfachen zwischen $-n\varepsilon$ und $n\varepsilon$ kommen tatsächlich vor; ensprechend sind für ungerades n nur ungeradzahlige Vielfache von ε möglich, und auch hier werden wieder alle solchen Werte zwischen $-n\varepsilon$ und $n\varepsilon$ angenommen. Wir können dies dadurch zusammenfassen, daß in beiden Fällen genau die Werte $(n-2k)\varepsilon$ mit $k=0,\dots,n$ angenommen werden, und das PASCALsche Dreieck zeigt, daß der Fehler $(n-2k)\varepsilon$ in

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

Fällen auftritt. Da n „Dämonen“ insgesamt 2^n Möglichkeiten zur Fehlererzeugung haben, ist die Wahrscheinlichkeit für den Gesamtfehler $(n-2k)\varepsilon$ also

$$\binom{n}{k}\cdot 2^{-n}\,.$$

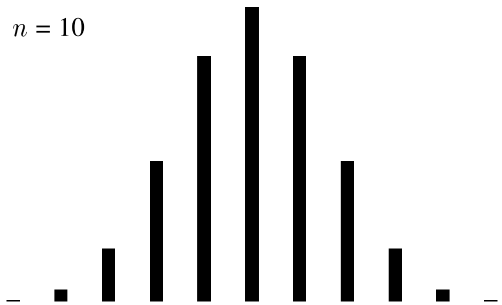
Für größere Werte von n wird es übersichtlicher; wenn wir die Binomialkoeffizienten graphisch darstellen. Dies auf den nächsten beiden Seiten für $n = 5, 10, 50, 100, 500$ und 1000 aufgezeichnet, wobei die sechs Diagramme jeweils so skaliert sind, daß alle dieselbe Höhe und Breite haben. (Was das genau bedeutet, wird spätestens bei der Lektüre des in Kürze folgenden Kleingedruckten klar werden.)

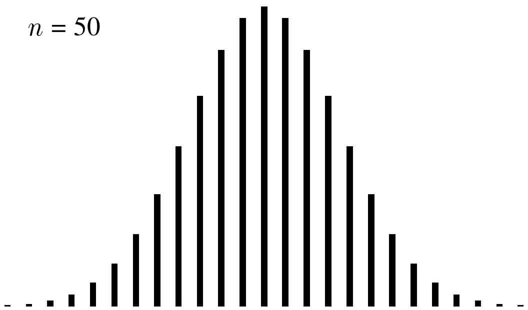
Wie die Bilder zeigen, nähern sich die Balkendiagramme immer besser einer etwa glockenförmigen Kurve, die in Abbildung 14 und auf jedem Zehnmarkschein zu sehen ist.

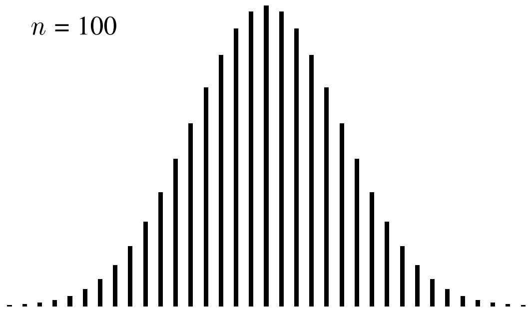
Diese Kurve ist die bekannte GAUSSkurve oder Glockenkurve; man spricht von *normalverteilten* Daten, wenn sich die Daten durch eine solche Verteilung beschreiben lassen. Damit haben wir also zumindest graphisch gesehen, daß Meßfehler nach dem LAPLACEschen Fehlermodell normalverteilt sind.

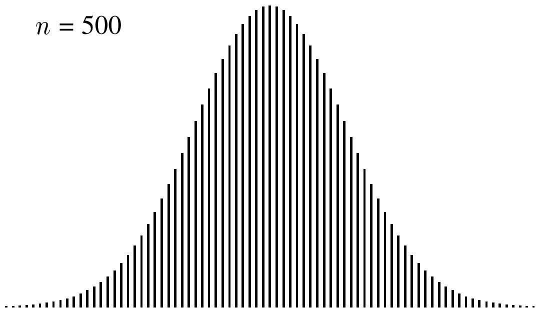
Das LAPLACEshe Fehlermodell geht, wie schon eingangs festgestellt, von unrealistisch einfachen Annahmen aus; nach einem der fundamentale Gesetze der Statistik, dem *zentralen Grenzwertsatz,* führen aber auch realistischere Annahmen zu genau derselben Verteilung: Sind $u_1, \dots, u_n$ beliebige Quellen von Zufallsfehlern, über deren Verteilung

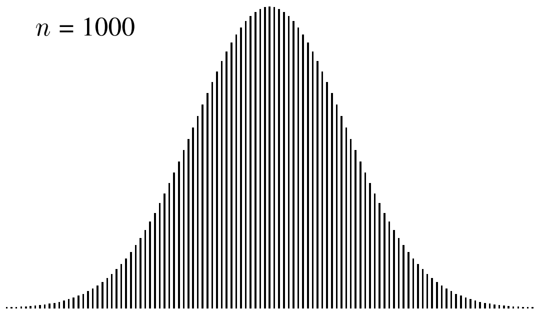

$n = 5$


$n = 10$


$n = 50$


$n = 100$


$n = 500$


$n = 1000$

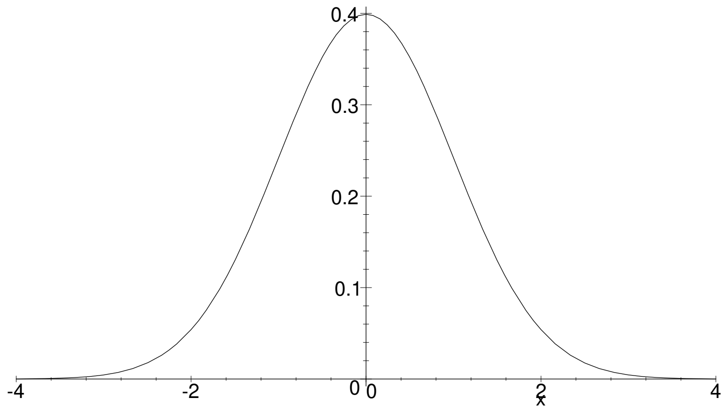


Abb. 14: Die „Glockenkurve“ $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

wir (fast) nichts voraussetzen müssen, so ist ihre Summe für hinreichend großes n annähernd normalverteilt. Das eingeklammerte Wort „fast“ ist dabei für praktische Zwecke bedeutungslos, und als „groß“ kann man sich ein n ab etwa dreißig oder vierzig vorstellen.

Leider ist in dieser Vorlesung nicht genug Zeit, um auch nur annähernd die notwendigen Grundlagen für einen Beweis des zentralen Grenzwertsatzes bereitszustellen. Wir kennen aber immerhin schon ein Beispiel: Für das LAPLACEsche Fehlermodell ist $u_i = \pm\varepsilon$ mit Wahrscheinlichkeit jeweils 50%, und wir haben zumindest graphisch gesehen, daß die Summe gegen eine Normalverteilung konvergiert.

Zumindest in diesem einfachen Fall können wir dies auch rechnerisch einsehen und auf diesem Weg insbesondere auch die Gleichung der Glockenkurve herleiten.

Dazu müssen wir uns zunächst überlegen, was ε tun soll, wenn n gegen unendlich geht. Da die Anzahl n der „Dämonen“ eine künstliche Hilfsgröße ohne inhaltliche Bedeutung ist, sollte die Fehlerverteilung möglichst unabhängig von n sein.

Wir kennen zwei statistische Kennzahlen zur Beschreibung der Fehlerverteilung: Das arithmetische Mittel und die Varianz. Das arithmetische Mittel ist (z.B. aus Symmetriegründen) null, bleibt also noch die Varianz.

Zu deren Berechnung müssen wir die Fehlerquadrate über die 2^n möglichen Verhaltens-

weisen der „Dämonen“ summieren, d.h. wir müssen

$$\sigma^2 = \frac{1}{2^n} \sum (\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n)^2$$

berechnen, wobei sich die Summation über alle Tupel

$$(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \quad \text{mit} \quad \varepsilon_i = \pm\varepsilon$$

erstreckt. Beim Ausmultiplizieren heben sich alle gemischten Terme der Form $\varepsilon_i\varepsilon_j$ gegenseitig weg, denn das Tupel, bei dem nur an der i-ten Stelle das Vorzeichen das Vorzeichen geändert wurde, liefert einen Summanden $-\varepsilon_i\varepsilon_j$. Also bleiben nur die Quadrate; diese sind alle gleich ε^2, und es sind pro Summand n Stück. Da die Anzahl der Summanden gleich dem Nenner des Vorfaktors ist, berechnet sich die Varianz daher zu

$$\sigma^2 = n\varepsilon^2$$

Somit müssen wir für $n \to \infty$ den Einfluß ε jedes einzelnen „Dämonen“ so gegen null gehen lassen, daß $n\varepsilon^2$ konstant bleibt, d.h. wir setzen

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

für eine geeignet zu wählende Konstante $\sigma > 0$, die Standardabweichung.

Wir wollen nun im Limes für $n \to \infty$ berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein bestimmter Fehler u auftritt. Für festgehaltenes n und

$$u = (n - 2k)\varepsilon = \frac{(n - 2k)\sigma}{\sqrt{n}}$$

ist diese Wahrscheinlichkeit gleich

$$\binom{n}{k} 2^{-n-1} \frac{\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{n!}{k!(n-k)!} 2^{-n-1} \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\ ;$$

wir müssen also diesen Ausdrucks für $n \to \infty$ und konstantes

$$u = (n - 2k)\varepsilon = \frac{(n - 2k)\sigma}{\sqrt{n}}$$

betrachten.

Was uns interessiert ist allerdings nicht der Grenzwert dieses Ausdrucks: Mit n geht schließlich auch die Anzahl der zu betrachtenden Fälle gegen unendlich, so daß die Wahrscheinlichkeit für jeden einzelnen dieser Fälle notgedrungen gehen Null gehen muß, denn die Summe aller Wahrscheinlichkeiten kann natürlich nicht größer als eins werden.

Wenn wir n variieren lassen, ist es ohnehin sinnlos, einen genauen Wert des Fehlers zu betrachten: Schließlich gibt es für jedes n nur $n + 1$ mögliche Werte, und bei den meisten größeren Werten von n werden diese Werte – abgesehen von der Null – nicht auftreten. Wenn wir etwas von n unabhängiges definieren möchten, dürfen wir also nicht den genauen *Wert* des Fehlers festlegen, sondern ein *Fehlerintervall* betrachten, in dem er variieren kann.

Nun wollen wir aber natürlich als Ergebnis keine Funktion, die von einem Intervall abhängt, sondern eine gewöhnliche Funktion von u. Um eine solche zu bekommen, betrachten wir nicht die Wahrscheinlichkeit, sondern die *Wahrscheinlichkeitsdichte:* Für eine kontinuierlich variierende Zufallsvariable definieren wir die Wahrscheinlichkeitsdichte $\varphi(u_0)$ im Punkt u_0 als

$$\varphi(u_0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\text{Wahrscheinlichkeit für } u_0-\varepsilon \le u \le u_0-\varepsilon}{2\varepsilon},$$

d.h. also als Wahrscheinlichkeit dividiert durch die Intervallbreite. Falls diese Dichte existiert, folgt mehr oder weniger sofort aus der Definition des RIEMANN-Integrals, daß

$$(\text{Wahrscheinlichkeit für } a \le u \le b) = \int_a^b \varphi(u)\,du$$

ist.

Unsere Aufgabe ist daher, diese Wahrscheinlichkeitsdichte φ für $n \to \infty$ auszurechnen.

Für festes n haben die möglichen Fehlerwerte den Abstand 2ε, wir betrachten daher Intervalle der Länge 2ε mit den Werten $(n-2k)\varepsilon$ als Mittelpunkten; diese überdecken den möglichen Fehlerbereich lückenlos, und die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler in diesem Intervall ist $\binom{n}{k}2^{-n}$.

Wir interessieren uns daher für den Grenzwert von

$$\frac{\binom{n}{k}2^{-n}}{2\varepsilon} = \frac{\binom{n}{k}2^{-n}}{2\sigma/\sqrt{n}} = \binom{n}{k}2^{-n-1}\sqrt{n}\,.$$

Um diesen Ausdruck für $n \to \infty$ abzuschätzen benutzen wir eine Verbesserung der in **[HM1]**, Kapitel 1, §4*b2)* hergeleiteten Abschnätzung für $\ln n!$, die STIRLINGsche Formel

$$\ln n! = n(\ln n - 1) + \tfrac{1}{2}\ln n + \ln(2\pi) + o(1)$$

oder

$$n! \approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\,,$$

die übrigens genau für diese Rechnung erstmalig aufgestellt wurde. Demnach ist

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} &\approx \frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{k^k e^{-k}\sqrt{2\pi k}\,(n-k)^{n-k}e^{-(n-k)}\sqrt{2\pi(n-k)}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{n^n}{k^k\,(n-k)^{n-k}}\sqrt{\frac{n}{k\cdot(n-k)}}\,.\end{aligned}$$

Dabei ist wegen obiger Beziehung

$$k = \frac{n}{2} - \frac{u\sqrt{n}}{2\sigma}\,.$$

Setzen wir zur Vereinfachung der Schreibweise

$$m = \frac{n}{2},\quad v = \frac{u}{2\sigma}\quad\text{und}\quad \ell = \sqrt{2m}\cdot v\,,$$

so ist

$$k = m - \sqrt{2m}\cdot v = m - \ell \quad\text{und}\quad n-k = m + \sqrt{2m}\cdot v = m + \ell\,,$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}&\binom{n}{k}2^{-n-1}\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\\ \approx{}& \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{n^n}{k^k\,(n-k)^{n-k}}\sqrt{\frac{n}{k\cdot(n-k)}}\,2^{-n-1}\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\\ ={}& \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,\frac{n^n\cdot 2^{-n}}{k^k\,(n-k)^{n-k}}\,\frac{n\cdot 2^{-1}}{\sqrt{k\cdot(n-k)}}\\ ={}& \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,\frac{(2m)^{2m}\cdot 2^{-2m}}{(m-\ell)^{m-\ell}(m+\ell)^{m+\ell}}\,\frac{2m\cdot 2^{-1}}{\sqrt{(m-\ell)(m+\ell)}}\\ ={}& \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,\frac{m^{2m}}{(m-\ell)^m(m+\ell)^m}\left(\frac{m-\ell}{m+\ell}\right)^{\ell}\frac{m}{\sqrt{m^2-\ell^2}}\\ ={}& \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,\frac{m^{2m}}{(m^2-\ell^2)^m}\left(\frac{m-\ell}{m+\ell}\right)^{\ell}\frac{m}{\sqrt{m^2-\ell^2}}\\ ={}& \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,\frac{1}{\left(1-\frac{\ell^2}{m^2}\right)^m}\left(\frac{1-\ell/m}{1+\ell/m}\right)^{\ell}\frac{1}{\sqrt{1-\ell^2/m^2}}\\ ={}& \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,\frac{1}{\left(1-\frac{2v^2}{m}\right)^m}\left(\frac{1-\sqrt{2/m}\cdot v}{1+\sqrt{2/m}\cdot v}\right)^{\sqrt{2m}\cdot v}\frac{1}{\sqrt{1-2v^2/m}}\,.\end{aligned}$$

Nun können wir langsam daran denken, n (und damit auch m) gegen unendlich gehen zu lassen; wir verwenden dazu die aus der Analysis I und wahrscheinlich auch aus der Schule bekannte Beziehung

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\,.$$

Danach ist insbesondere

$$\lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{2v^2}{m}\right)^m = e^{-2v^2}$$

und

$$\lim_{m\to\infty}\left(1\pm\sqrt{\frac{2}{m}}\cdot v\right)^{\sqrt{2m}\cdot v} = \lim_{m\to\infty}\left(1\pm\frac{\sqrt{2}\cdot v}{\sqrt{m}}\right)^{\sqrt{m}\cdot\sqrt{2}\cdot v}$$

$$= \lim_{q\to\infty}\left(1\pm\frac{\sqrt{2}\cdot v}{q}\right)^{q\cdot\sqrt{2}\cdot v} = \left(e^{\pm\sqrt{2}\cdot v}\right)^{\sqrt{2}\cdot v} = e^{\pm 2v^2}\,,$$

denn es bleibt sich natürlich gleich, ob m oder $q=\sqrt{m}$ gegen unendlich geht. Da der Term v^2/m gegen null geht, erhalten wir somit als Grenzwert des gesamten obigen Ausdrucks

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot\frac{1}{e^{-2v^2}}\cdot\frac{e^{-2v^2}}{e^{+2v^2}}\cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-2v^2}\,.$$

Beachten wir nun noch, daß $v=u/2\sigma$ und $u=x-a$ war, erhalten wir als Endergebnis den oben angegebenen Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-u^2/2\sigma^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}\,.$$

Als *Normalverteilung mit Mittelwert a und Standardabweichung* σ bezeichnen wir daher die Verteilung mit Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,.$$

Diese Wahrscheinlichkeitsdichte hängt offensichtlich nur von der *normierten* Variablen

$$z=\frac{x-a}{\sigma}$$

ab; diese hat Mittelwert null und Standardabweichung eins. Daher gibt es für die Normalverteilung nicht – wie für viele andere statistische Verteilungen – je nach Parameterwerten verschiedene Tabellen, sondern man findet in allen Tabellenwerken nur die Normalverteilung mit Mittelwert null und Standardabweichung eins, man findet also die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\varphi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$$

und deren Integral

$$F(z)=\int_{-\infty}^{z} f(u)\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du\,.$$

Dieses Integral läßt sich nicht weiter vereinfachen, da sich die Stammfunktion von $e^{-u^2/2}$, wie wir aus **[HM1]**, Kapitel I, §5*h2)* wissen, nicht durch elementare Funktionen ausdrücken. Mit der dort definierten Fehlerfunktion ist

$$F(z)=\frac{1+\mathrm{Erf}(z)}{2}\,.$$

Für die Bestimmung von $F(z)$ wie auch $\mathrm{Erf}(z)$ ist man daher auf Tabellen oder Computerprogramme angewiesen; eine graphische Darstellung von $F(z)$ ist in Abbildung 15 zu sehen. Mit dieser Funktion läßt sich die Wahrscheinlichkeit dafür, daß

$$c\le z=\frac{x-a}{\sigma}\le d$$

ist berechnen als $F(d)-F(d)$, und damit läßt sich auch leicht die Wahrscheinlichkeit berechnen, daß x selbst zwischen zwei gegebenen Schranken liegt.

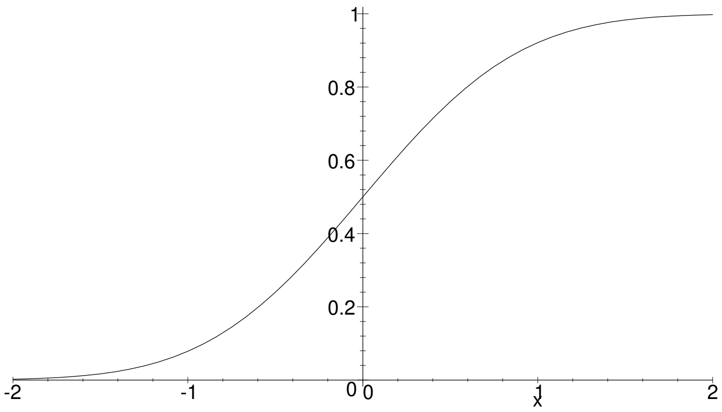


Abb. 15: Das Integral $F(z)$ über die „Glockenkurve“

Wie Abbildung 15 zeigt, ist $F(-2)$ sehr nahe bei null und $F(2)$ sehr nahe bei eins liegt. In der Tat ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Wert z Betrag größer zwei hat kleiner als 5%; genauer gilt für eine beliebige Normalverteilung, daß der Wert der Variablen mit folgenden

Wahrscheinlichkeiten um höchstens $i\sigma$ vom Mittelwert abweicht:

$i =$	1	2	3	4
Wahrscheinlichkeit:	$0,683$	$0,954$	$0,9973$	$0,99994$

Damit liegen also etwa zwei Drittel aller Fehler zwischen $-\sigma$ und σ, 95% liegen zwischen -2σ und 2σ und 99,7% zwischen -3σ und 3σ; die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Fehler größer als 3σ ist, beträgt also nur etwa 0,27%. Da Ereignisse mit einer so geringen Wahrscheinlichkeit praktisch nie auftreten, betrachtet man Fehler, die außerhalb des 3σ-Bereichs liegen, meist als „Ausreißer", d.h. als grobe Meßfehler, die bei der Bestimmung des Ergebnisses nicht berücksichtigt werden. Sehr vorsichtige Leute reden auch erst ab einer Abweichung von $e\sigma$ von Ausreißern.

Für Leser, die ihren Computer selbst programmieren und keine spezielle Statistiksoftware haben, sei hier eine Näherungsformel für $F(z)$ angegeben: Mit einem Fehler von höchstens $7{,}5 \cdot 10^{-8}$ ist

$$F(z) = 1 - \varphi(z) \cdot (a_1 t + a_2 t^2 + a_3 a^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5)$$

mit $t = \dfrac{1}{1 + pz}$ und $\varphi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$ sowie

$$\begin{array}{lll} a_1 = 0{,}319\,381\,530 & a_2 = -0{,}356\,563\,782 & a_3 = 1{,}781\,477\,973 \\ a_4 = -1{,}821\,255\,978 & a_5 = 1{,}330\,274\,429 & p = 0{,}231\,641\,9 \quad . \end{array}$$

Beim Rechnen mit dem Taschenrechner kann man sich auch mit einer vereinfachten Version begnügen, bei der $a_4 = a_5 = 0$ ist und

$$a_1 = 0{,}436\,1836 \quad a_2 = -0{,}120\,1676 \quad a_3 = 0{,}937\,2980 \quad p = 0{,}332\,67\ ;$$

hier kann der Fehler bis zu 10^{-5} betragen.

c) Das Fehlerfortpflanzungsgesetz

Gegeben seien zwei Größen

$$x = \hat{x} \pm \sigma_x \quad \text{und} \quad y = \hat{y} \pm \sigma_y$$

(die Verallgemeinerung auf mehr als zwei Größen erfordert, wie man sich bei der folgenden Rechnung leicht klarmacht, nur etwas mehr Schreibaufwand; sie ist nicht prinzipiell schwieriger), und eine Größe

$$w = f(x, y)\,,$$

die von diesen beiden abhängt. Um vernünftige Aussagen machen zu können, setzen wir dabei f als stetig differenzierbar voraus.

Für x seien n Meßwerte $x_1, \dots, x_n$ gegeben, und für y entsprechend m Werte $y_1, \dots, y_m$. Realistischerweise wird man davon ausgehen können, daß die Fehler der x-Werte und die der y-Werte voneinander unabhängig sind, und das wollen wir im folgenden auch annehmen.

Für w haben wir dann $n \cdot m$ Werte

$$w_{ij} = f(x_i, y_j)\,,$$

deren Mittelwert die beste Schätzung für den „wahren" Wert $\widehat{w} = f(\hat{x}, \hat{y})$ ist. Dieser Mittelwert ist für komplizierte Funktionen f und/oder große Werte von n und m umständlich auszurechnen; einfacher wäre es, einfach den Mittelwert $\bar{x}$ der x_i und den Mittelwert $\bar{y}$ der y_j zu berechnen, um dann $\overline{w} = f(\bar{x}, \bar{y})$ als Schätzung für $\widehat{w}$ zu benutzen. Dies ist in der Tat möglich: Ist

$$x_i = \bar{x} + h_i \quad \text{und} \quad y_j = \bar{y}_j + k_j\,,$$

so ist

$$\begin{aligned} w_{ij} &= f(x_i, y_j) = f(\bar{x} + h_i, \bar{y} + k_j) \\ &= f(\bar{x}, \bar{y}) + f_x(\bar{x}, \bar{y}) h_i + f_y(\bar{x}, \bar{y}) k_j + o(\sqrt{h_i^2 + k_j^2})\,. \end{aligned}$$

Da die h_i und die k_j als Abweichungen von einem Mittelwert jeweils Mittelwert null haben, ist also der Mittelwert der w_{ij} für nicht allzu große Fehler h_i und k_j in der Tat näherungsweise gleich $f(\bar{x}, \bar{y})$.

Als nächstes müssen wir den Fehler von $\widehat{w}$ berechnen, also den Erwartungswert der $(w_{ij} - \widehat{w})^2$. Dazu schreiben wir zunächst

$$x_i = \hat{x} + u_i \quad \text{und} \quad y_j = \hat{y}_j + v_j\,,$$

betrachten also anstelle der Abweichungen vom Mittelwert die echten Meßfehler, und erhalten genau wie eben

$$\begin{aligned} w_{ij} - \widehat{w} &= f(x_i, y_j) - f(\hat{x}, \hat{y}) \\ &\approx u_i \cdot f_x(\hat{x}, \hat{y}) + v_j \cdot f_y(\hat{x}, \hat{y})\,, \end{aligned}$$

also

$$(w_{ij} - \widehat{w})^2 \approx \big(u_i \cdot f_x(\hat{x}, \hat{y}) + v_j \cdot f_y(\hat{x}, \hat{y})\big)^2$$
$$= u_i^2 \cdot f_x(\hat{x}, \hat{y})^2 + v_j^2 \cdot f_y(\hat{x}, \hat{y})^2 + 2u_i \cdot v_j \cdot f_x(\hat{x}, \hat{y}) \cdot f_y(\hat{x}, \hat{y}) .$$

Der Erwartungswert der u_i^2 ist σ_x^2, der der v_j^2 entsprechend σ_y^2, und da die u_i und die v_j jeweils Erwartungswert Null haben und voneinander unabhängig sind, ist der Erwartungswert für $u_i \cdot v_j$ ebenfalls Null. Damit folgt das GAUSS*sche Fehlerfortpflanzungsgesetz*

$$\sigma_w^2 = f_x(\hat{x}, \hat{y})^2 \cdot \sigma_x^2 + f_y(\hat{x}, \hat{y})^2 \cdot \sigma_y^2$$

oder

$$\sigma_w = \sqrt{f_x(\hat{x}, \hat{y})^2 \cdot \sigma_x^2 + f_y(\hat{x}, \hat{y})^2 \cdot \sigma_y^2} .$$

Genauso gilt dieses Gesetz auch für Funktionen von mehr als zwei Größen; für $w = f(x_1, \ldots, x_n)$ ist

$$\sigma_w = \sqrt{f_{x_1}(\hat{x}_1, \ldots \hat{x}_n)^2 \cdot \sigma_{x_1}^2 + \cdots + f_{x_n}(\hat{x}_1, \ldots \hat{x}_n)^2 \cdot \sigma_{x_n}^2} .$$

d) Die Standardabweichung des Mittelwerts und die Schätzung der Varianz

Als einfache Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes betrachten wir die Funktion

$$\bar{x} = f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} ,$$

also den Mittelwert der x_i. Jede Messung x_i sei mit demselben erwarteten Fehler σ behaftet; da alle partiellen Ableitungen von f gleich $1/n$ sind, folgt für den Fehler des Mittelwerts also

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} .$$

Dies bestätigt die implizit stets angewandte Regel, daß man durch mehrfaches Messen ein zuverlässigeres Ergebnis erhält; durch 25 Messungen beispielsweise läßt sich der Fehler auf ein Fünftel reduzieren.

Damit wissen wir, wie man aus den Meßwerten auf den Fehler des Mittelwerts schließen kann – sofern man die Fehler der Meßwerte kennt. Wie lassen sich diese schätzen?

Da der Mittelwert $\bar{x}$ die bestmögliche Schätzung für den korrekten Wert $\hat{x}$ ist, könnte man beispielsweise den Mittelwert der $(\bar{x} - x_i)^2$ als Schätzung für den Mittelwert σ^2 der quadratischen Abweichungen von $\hat{x}$ nehmen. Diese Schätzung ist aber zu optimistisch, da ja $\bar{x}$ selbst noch fehlerbehaftet ist. Dieser zusätzliche Fehler kann wie folgt berücksichtigt werden: Zunächst ist

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\hat{x} - x_i)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \big((\hat{x} - \bar{x}) + (\bar{x} - x_i)\big)^2$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\hat{x} - \bar{x})^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\bar{x} - x_i)^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\hat{x} - \bar{x}) \cdot (\bar{x} - x_i) .$$

Die letzte dieser drei Summen ist

$$\frac{(\hat{x} - \bar{x})}{n} \sum_{i=1}^{n} (\bar{x} - x_i) = 0 ,$$

da $\bar{x}$ der Mittelwert der x_i ist, die zweite Summe ist der Mittelwert der $(\bar{x} - x_i)^2$, und von der ersten schließlich wissen wir, daß $(\hat{x} - \bar{x})^2$, das Quadrat des Fehlers des Mittelwerts, den Erwartungswert σ^2/n hat. Die gesamte erste Summe ist somit

$$\frac{1}{n} \cdot n \cdot \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\sigma^2}{n} ,$$

und obige Formel wird zu

$$\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\bar{x} - x_i)^2 .$$

Bringt man hier noch den Term σ^2/n auf die linke Seite, so folgt

$$\frac{n-1}{n} \cdot \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\bar{x} - x_i)^2$$

oder

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\bar{x} - x_i)^2 ,$$

also

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\bar{x} - x_i)^2}{n-1}}\,.$$

Somit läßt sich auch σ aus den Meßdaten berechnen, der Meßfehler kann also ohne Kenntnis des „wahren“ Werts anhand der gemessenen Werte geschätzt werden.

e) Die Maximum likelihood Methode und die Methode der kleinsten Quadrate

Oftmals ist zu gegebenen Beobachtungsdaten grundsätzlich bekannt, welcher *Art* von Gesetz sie genügen sollten, und das Problem besteht „nur“ noch darin, die in diesem Gesetz vorkommenden *Parameter* zu bestimmen. Im einfachsten Fall könnte man etwa an einen Widerstand denken, der dadurch gemessen wird, daß man verschiedene Spannungen U_i anlegt und die zugehörigen Stromstärken I_i mißt. Nach dem Ohmschen Gesetz ist dann $U_i = R \cdot I_i$, aber aufgrund der unvermeidlichen Meßfehler werden die verschiedenen Quotienten U_i/I_i natürlich nicht alle gleich sein. Die Lösung dieses Problems ist klar: Man nimmt den Mittelwert der Quotienten. Schwieriger wird es, wenn mehrere Parameter ins Spiel kommen.

Betrachten wir als Beispiel etwa die Entwicklung der Weltbevölkerung. Da (vor allem auf dem Stand von 1960) vieles für ein stärker als exponentielles Bevölkerungswachstum sprach, enwickelten damals HEINZ VON FOERSTER, PATRICIA M. MORA und LAWRENCE W. AMIOT, allesamt Elektrotechniker an der University of Illinois in Urbana, ein überexponentielles Wachstumsmodell. Die Wachstumsdifferentialgleichung führte auf Funktion

$$u = f(t) = \frac{\beta}{(t_0 - t)^s}$$

wobei $u = f(t)$ die Weltbevölkerungsstärke um Zeitpunkt t bezeichnet; β, t_0 und t sind Parameter, die aufgrund der bekannten Zahlen zur Bevölkerungsentwicklung geschätzt werden müssen. Besonders interessant ist dabei natürlich der Parameter t_0, denn zum Zeitpunkt $t = t_0$ wird

die Weltbevölkerung unendlich, was man wohl mit dem Weltuntergang gleichsetzen kann.

Für zahlreiche Zeitpunkte t_i sind die Bevölkerungszahlen u_i oder zumindest Schätzungen dafür bekannt, aber natürlich gibt es auch hier keine Parameterwerte, für die *alle* u_i gleich $f(t_i)$ sind; Ziel kann es nur sein, die Parameter so zu wählen, daß die Unterschiede zwischen u_i und $f(t_i)$ nicht zu groß werden.

FOERSTER, MORA und AMIOT taten genau das und kamen auf das Ergebnis

$$\begin{aligned}\beta &= (179 \pm 14) \cdot 10^9\\ s &= 0{,}990 \pm 0{,}009\\ C &= 2026{,}87 \pm 5{,}5 \text{ Jahre}\\ r &= 2{,}01 \pm 0{,}009\,;\end{aligned}$$

der Weltuntergang ist also etwa 2026 fällig. Der beste Schätzwert für das Datum ist, wenn wir 0,87 Jahre in Tage, Stunden und Minuten umrechnen, der 13. November gegen 13^{13} Uhr – sofern man das bei einer Standardabweichung von fünfeinhalb Jahren überhaupt so genau wissen will. (Für Einzelheiten sei auf die Arbeit *Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026*, Science **138**, November 1960, Seite 1291–1295, verwiesen.)

Da Weltuntergangsszenarien nicht zum Stoff dieser Vorlesung gehören, wollen wir auf die genaue Behandlung dieses Beispiels verzichten; wir wollen aber zumindest grundsätzlich verstehen lernen, wie man solche Parameterschätzungen durchführen kann, und wir wollen diese Techniken auch auf etwas alltäglichere Probleme anwenden.

Der allgemeine Ansatz ist folgender: Sei $u = f(a, b, \ldots; t)$ der von den Parametern $a, b, \ldots$ abhängige Zusammenhang zwischen den Größen t und u, und seien $(t_1, u_1), \ldots, (t_n, u_n)$ gegebene (Meß-)Werte, an die die Parameter angepaßt werden sollen.

Nehmen wir an, es gäbe Parameter $a, b, \ldots$, für die $u = f(a, b, \ldots; t)$ den exakten Zusammenhang zwischen den Größen u und t wiedergibt, daß aber die Werte u_i aufgrund von Beobachtungsfehlern von den

$f(a, b, \ldots; t_i)$ abweichen – das ist genau die Situation, mit denen man es in den Naturwissenschaften meist zu tun hat.

Bezüglich der weiteren Vorgehensweise können wir dann auch hier wieder wie beim arithmetischen Mittel und der Standardabweichung argumentieren: Wir versuchen, den EUKLIDischen Abstand zwischen dem Vektor der tatsächlichen Beobachtungswerte und dem der vorhergesagten Werte zu minimiere, d.h. wir wählen die Parameter $a, b, \ldots$ so, daß

$$\sum_{i=1}^{n} \big(u_i - f(a, b, \ldots; t_i)\big)^2$$

minimal wird – das ist die von CARL FRIEDRICH GAUSS eingeführte *Methode der kleinsten Quadrate.*

GAUSS gab im Laufe seines Lebens mehrere Begründungen für diese Methode (die er bei sowohl bei seinen astronomischen Arbeiten wie auch bei der Vermessung des Königreichs Hannover zwischen 1818 und 1832 ständig benutzte); die unter dem Gesichtspunkt einer in sich geschlossenen Fehlertheorie interessanteste beruht auf dem LAPLACEschen Fehlermodell:

Danach sollte der Wert u_i für die korrekten Parameterwerte $a, b, \ldots$ aus einer Normalverteilung mit Mittelwert $f(a, b, \ldots; t_i)$ kommen, deren Standardabweichung σ_i von der Genauigkeit abhängt, mit der u_i bestimmt werden kann. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß u_i zwischen zwei Werten a und b liegt, ist damit

$$\int_a^b e^{-\big(u - f(a, b, \ldots; t_i)\big)^2/2\sigma_i} .$$

Von der Wahrscheinlichkeit, daß u_i gleich einem Wert c ist, können wir natürlich nicht reden, da diese nach obiger Formel ein Integral von c nach c wäre, also Null. Aber die Wahrscheinlichkeit dafür, daß u_i in einem kleinen Intervall der Länge ε_i um einen Wert c_i liegt, ist ungefähr proportional zum ε_i-fachen Wert des Integranden an der Stelle c_i, also zu

$$\varepsilon_i \cdot e^{-\big(c_i - f(a, b, \ldots; t_i)\big)^2/2\sigma_i} .$$

Entsprechend ist

$$\varepsilon_j \cdot e^{-\big(c_j - f(a, b, \ldots; t_j)\big)^2/2\sigma_j}$$

ungefähr gleich der Wahrscheinlichkeit dafür, daß u_j in einem Intervall der Breite ε_j um c_j liegt.

Wenn wir wie üblich davon ausgehen, daß keine systematischen Fehler auftreten, sind die Fehler von u_i und u_j voneinander unabhängig, die Wahrscheinlichkeit dafür, daß (u_i, u_j) in einem Rechteck mit Seiten ε_i und ε_j um (c_i, c_j) liegt, ist also proportional zum Produkt der beiden obigen Einzelwahrscheinlichkeiten, d.h. zu

$$\varepsilon_i \varepsilon_j \, e^{-\big(c_i - f(a, b, \ldots; t_i)\big)^2/2\sigma_i - \big(c_j - f(a, b, \ldots; t_j)\big)^2/2\sigma_j} .$$

Entsprechend kann auch die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden, daß der Punkt $(u_1, \ldots, u_n)$ in einem kleinen gegebenen Quader mit Kantenlängen $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ liegt; sie ergibt sich zu

$$L(a, b, \ldots) \cdot \prod_{i=1}^{n} \varepsilon_i$$

mit

$$L(a, b, \ldots) \underset{\text{def}}{=} e^{\sum_{i=1}^{n} \big(u_i - f(a, b, \ldots; t_i)\big)^2/2\sigma_i} .$$

Diese Größe ist selbst keine Wahrscheinlichkeit, sondern der Quotient aus einer Wahrscheinlichkeit und einem Volumen; man spricht daher von einer *Wahrscheinlichkeitsdichte.*

Wenn wir diese Wahrscheinlichkeitsdichte als Funktion von $a, b, \ldots$ betrachten, macht sie eine Aussage über die Güte der Parameter: Schließlich wird man einem Modell, das dem beobachteten Ausgang eines Experiments eine hohe Wahrscheinlichkeit zuweist, eher glauben als einem alternativen Modell, das die beobachteten Daten zu Ausreißern erklärt. Aus diesem Grund kann die Funktion L auch als Maß dafür betrachtet werden, wie „wahrscheinlich“ in irgendeinem umgangssprachlichen (und schwer präzisierbaren) Sinne die Parameter $a, b, \ldots$ sind.

Im englischen gibt es zwei Wörter für Wahrscheinlichkeit: Das romanische Wort *probability* und das germanische Wort *likelihood.* Für den mathematisch exakten Wahrscheinlichkeitsbegriff verwendet man probability, für „Wahrscheinlichkeit" im Sinne der Funktion L likelihood. Da es im deutschen kein zweites Wort für Wahrscheinlichkeit gibt, spricht man hier in Anlehnung an das Englische von einer *Likelihoodfunktion.*

Die Maximum Likelihood Methode besteht nun genau in dem, was ihr Name besagt: *Man wähle die Parameter $a, b, \ldots$ so, daß die Likelihoodfunktion maximal wird.*

Da $L(a, b, \ldots)$ durch eine Exponentialfunktion beschrieben wird, wird die Likelihoodfunktion genau dann maximal, wenn ihr Exponent maximal wird. Dieser Exponent ist eine negative Zahl, wird also genau dann maximal, wenn sein Betrag *minimal* wird, das heißt, wenn die Quadratsumme

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\big(u_i - f(a, b, \ldots; t_i)\big)^2}{2\sigma_i}$$

minimal wird.

In vielen Fällen wird die Zuverlässigkeit der einzelnen Paare (t_i, u_i) miteinander vergleichbar sein, so daß alle σ_i gleich sind; in diesem Fall kann man die σ_i ignorieren und einfach die Quadratsumme

$$\sum_{i=1}^{n} \big(u_i - f(a, b, \ldots; t_i)\big)^2$$

minimieren, d.h. wir kommen wieder zur klassischen Methode der kleinsten Quadrate. Es gibt aber auch Anwendungen, wie etwa oben beim überexponentiellen Bevölkerungswachstum, bei denen die Verschiedenheit des σ_i sehr wesentlich ist: Sicherlich wird man etwa der auf Volkszählungen beruhenden Weltbevölkerungszahl, die die Vereinten Nationen für 1995 veröffentlichten, mehr Vertrauen entgegenbringen als der Schätzung eines Historikers für die Weltbevölkerung des Jahres Null.

Damit ist also die Bestimmung der optimalen Parameterwerte auf eine Extremwertaufgabe in mehreren Veränderlichen zurückgeführt, und wir können die Ergebnisse aus §1 anwenden.

Wir betrachten hier nur den einfachsten Fall einer Funktion, die von zwei Parametern abhängt: die lineare Funktion

$$u = f(a, b; t) = a \cdot t + b \,.$$

Auf genau dieselbe Weise lassen sich auch alle anderen Probleme, bei denen die Funktion f linear von ihren Parametern abhängt, auf das Lösen linearer Gleichungssysteme zurückführen.

In der Statistik bezeichnet man die Anwendung der Maximum Likelihood Methode auf dieses Problem als *lineare Regression.* Da wir alles so einfach wie möglich halten wollen, nehmen wir an, daß alle Messungen (t_i, u_i) die gleiche Zuverlässigkeit haben, so daß es einfach darum geht, die Funktion

$$F(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (u_i - a \cdot t_i - b)^2$$

zu minimieren. Bevor wir diese Funktion nach den Parametern a und b ableiten, empfiehlt es sich, sie zunächst auszumultiplizieren und nach Termen in a und b zu sortieren:

$$F(a, b) = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 + a^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i^2 + n \cdot b^2 - 2 \cdot a \cdot \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot t_i - 2 \cdot b \cdot \sum_{i=1}^{n} u_i + 2 \cdot a \cdot b \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i \,.$$

Damit ist

$$F_a(a, b) = 2 \cdot a \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i^2 - 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot t_i + 2 \cdot b \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i$$

und

$$F_b(a, b) = 2 \cdot n \cdot b - 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} u_i + 2 \cdot a \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i \,.$$

Da beide partielle Ableitungen verschwinden sollen, müssen beide Ausdrücke Null sein; nach Division durch zwei erhalten wir also die beiden Gleichungen

$$a \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot u_i$$

$$\text{und} \qquad a \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} u_i \,.$$

Um b zu eliminieren, multiplizieren wir die zweite Gleichung mit $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i$

$$a \cdot \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)$$

und subtrahieren dies von der ersten Gleichung:

$$a \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2\right) = \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot u_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right),$$

d.h.

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i \cdot u_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2}\,.$$

Entsprechend läßt sich a eliminieren, wenn wir die erste Gleichung mit $\sum t_i$ und die zweite mit $\sum t_i^2$ multiplizieren, und wir erhalten

$$b = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} t_i \cdot u_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} t_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2 - n\sum_{i=1}^{n} t_i^2}\,.$$

Als Beispiel dazu können wir die Voraussagen des Sachverständigenrats über den realen Anstieg des Bruttosozialprodukt (in den alten Bundesländern) mit den tatsächlichen Zahlen vergleichen:

Jahr:	1982	1983	1984	1985	1986	1987
vorausgesagt:	$+\frac{1}{2}$	$+1$	$+2\frac{1}{2}$	$+3$	$+3$	$+2$
tatsächlich:	$-1,1$	$+1,9$	$+3,1$	$+1,8$	$+2,2$	$+1,5$

Jahr:	1988	1989	1990	1991	1992
vorausgesagt:	$+1\frac{1}{2}$	$+2\frac{1}{2}$	$+3$	$+3$	$+2$
tatsächlich:	$+3,7$	$+4,0$	$+4,9$	$+3,6$	$+0,9$

Mit t_i = *vorausgesagtes Wachstum* und u_i = *tatsächliches Wachstum* ergibt sich nach Einsetzen in die obigen Formeln $a \approx 1,2$ und $b = -0,2$; die wirklichen Zahlen liegen also im Durchschnitt etwa 20% höher als die vorausgesagten. Genauer können wir sagen, daß der Sachverständigenrat *Trends*, das heißt Veränderungen der Wachstumsrate, *unterschätzt,* denn $(u_i - u_j) = a \cdot (t_i - t_j)$ ist im Durchschnitt 20% größer als das vorhergesagte $(t_i - t_j)$, und daß er im übrigen einen gewissen Grundoptimismus hat, der durch die Subtraktion von $0,2$ ausgeglichen werden muß.

Graphisch zeigt dies die Verteilung der Wertepaare für vorhergesagtes und tatsächliches Wachstum ist in der folgenden Abbildung; dort ist auch die Gerade $u = a \cdot t + b$ eingezeichnet. Wie man sieht, geht die Gerade zwar mitten durch die Punktwolke, aber viele Punkte liegen doch recht weit entfernt von ihr.

Dies stellt die Frage, wie man die Qualität der Ausgleichsgerade messen kann. Eine Antwort darauf liefert ein Argument, daß wir schon bei der Herleitung des GAUSSschen Fehlerfortpflanzungsgesetzes benutzt haben: Seien im folgenden $\bar{t}$ der Mittelwert der t_i und $\bar{u}$ der Mittelwert der u_i. Falls die u_i und die t_i aus voneinander unabhängigen Prozessen stammen, ist der Erwartungswert von

$$\sum_{i=1}^{n} (t_i - \bar{t}) \cdot (u_i - \bar{u})$$

Null, da die Summen der $t_i - \bar{t}$ und der $u_i - \bar{u}$ jeweils Null sind. Falls aber im anderen Extrem $u_i = a \cdot t_i + b$ ist für alle i, so ist $\bar{u} = a \cdot \bar{t} + b$

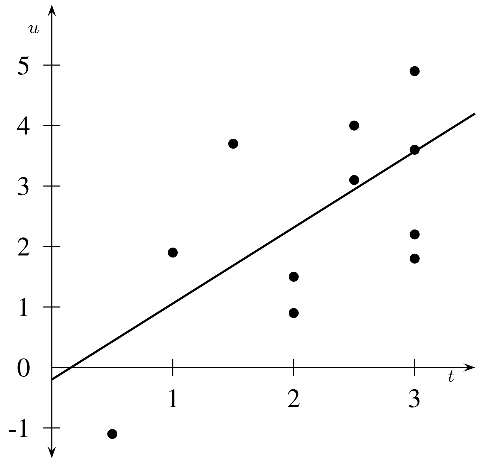


Abb. 16: Vorhersage der fünf Weisen und tatsächliche Entwicklung

und

$$\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar t)\cdot(u_i-\bar u)=\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar t)\cdot(a\cdot t_i-a\cdot\bar t)$$
$$=a\cdot\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar t)^2$$

eine (fast immer) positive Zahl, die eng mit der Standardabweichung der Verteilung der t_i zusammenhängt. Um sie weiter auszurechnen, beachten wir, daß

$$\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar u)^2=a^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar t)^2$$

ist und damit

$$\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar t)^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar u)=a^2\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar t)^2\right)^2$$

oder

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar t)^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar u)}=a\cdot\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar t)^2\,,$$

wobei im Zähler immer die nichtnegative Quadratwurzel gewählt werden soll. Damit ist also der Quotient

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar t)\cdot(u_i-\bar u)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar t)^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar u)}}$$

gleich ±1, je nach Vorzeichen von a, wenn alle $u_i=a\cdot t_i+b$ sind, und $r=0$, wenn die u_i unabhängig von den t_i sind. Mit elementaren Grundkenntnissen der Vektorrechnung läßt sich zeigen, daß r immer zwischen -1 und $+1$ liegt, und auch ohne Vektorrechnung ist das eine zwar etwas längliche, aber nicht allzu schwierige Rechnung. Dieses r nennen wir den *Korrelationskoeffizienten;* sein Betrag gibt an, wie gut die Beziehung zwischen den u_i und den t_i durch eine Gerade beschrieben werden kann, während sein Vorzeichen angibt, ob diese Gerade ansteigt oder sinkt. Im obigen Zahlenbeispiel ist $r\approx0{,}62$, die Approximation ist also eher mittelprächtig.

§3: Maxima und Minima unter Nebenbedingungen

Bei einem realen physikalischen oder technischen Prozeß können sich die Variablen natürlich nie frei im gesamten $\mathbb{R}^n$ bewegen: Physikalisch sinnvoll ist immer nur eine beschränkte Teilmenge. Im Gegensatz zur Dimension eins, wo diese Teilmenge praktisch immer ein Intervall ist, gibt es aber im Mehrdimensionalen keinen Grund, warum diese Teilmenge offen oder zumindest der Abschluß einer offenen Teilmenge sein sollte: Im $\mathbb{R}^3$ kann man sich beispielsweise auch interessieren für das Maximum oder Minumum der Ladungsdichte auf einer Kugeloberfläche oder die elektrische Feldstärke oder Temperaturverteilung auf der Innenhaut eines Reaktordruckbehälters.

Diese Maxima oder Minima sind im allgemeinen keine lokalen Maxima oder Minuma der betrachteten Funktion: Wenn man die jeweilige Fläche verläßt, läßt sich der Funktionswert selbst für einen solchen Extremwert meist noch – je nach Richtung – sowohl vergrößern als auch verkleinern. Dementsprechend können die Methoden, die wir am Ende von §1 diskutiert haben, solche Extremwerte üblicherweise nicht finden; wir brauchen weitere Werkzeuge, die in diesem Paragraphen bereitgestellt werden sollen.

Die Situation, um die es hier geht, ist typischerweise die folgende: Gegeben ist eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, möglicherweise auch nur auf einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ definiert, deren Extremwerte nicht auf $\mathbb{R}^n$ oder D gesucht werden, sondern nur auf einer Teilmenge, die beispielsweise durch das Verschwinden einer weiteren Funktion $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben ist, beispielsweise die Funktion

$$g\colon \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto x^2+y^2+z^2-r^2 \end{cases},$$

falls wir uns für Extremwerte auf einer Kugel vom Radius r um den Nullpunkt interessieren.

Eine mögliche Strategie zur Lösung solcher Probleme besteht darin, die Gleichung $g = 0$ nach einer der Variablen aufzulösen, diese dann in f einzusetzen und sodann eine gewöhnliche Extremwertaufgabe zu lösen. Diese Auflösung ist *explizit* nur in sehr einfachen Fällen möglich, aber selbst wenn wir nur wissen, daß eine solche Auflösung *existiert,* können wir doch damit argumentieren und Kriterien ableiten.

Daher ist das erste Etappenziel dieses Abschnitts ein Kriterium für die Auflösbarkeit von Gleichungen nach einer Variablen, und als technisches Hilfsmittel dazu benötigen wir zunächst eine Verallgemeinerung der Kettenregel auf skalarwertige Funktion mehrerer Veränderlicher.

a) Eine Kettenregel

Wir begnügen uns hier mit der Verknüpfung zwischen skalarwertigen Funktionen mehrerer Veränderlicher mit Funktionen einer Variablen nach $\mathbb{R}^n$. Eine solche Funktion $\gamma\colon (a,b) \to \mathbb{R}^n$ hat als Bild ein *Kurvenstück* im $\mathbb{R}^n$ und wird deshalb auch so bezeichnet. Sie ist gegeben

durch n Funktionen $\gamma_i\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, den Koordinaten des Punktes $\gamma(t)$, und als ihre Ableitung bezeichnen wir jenen Vektor $\dot\gamma(t)$, dessen Komponenten die Ableitungen $\dot\gamma_i(t)$ sind.

Unter $\dot\gamma(t)$ und $\dot\gamma_i(t)$ verstehen wir dabei einfach die Ableitungen nach dem Parameter t, d.h. das, was in der Analysis I als $\gamma_i'(t)$ bezeichnet worden wäre. Es gibt keinen logischen Unterschied zwischen den Bezeichnungen $\dot\gamma(t)$ und $\gamma'(t)$, jedoch hat es sich vor allem bei Anwendern der Mathematik eingebürgert, Ableitungen nach einem Parameter t (der oftmals, aber nicht immer, gleich der der Zeit ist), die Ableitung durch einen Punkt statt einen Strich zu bezeichnen.

Für solche Verknüpfungen eines Kurvenstücks mit einer Funktion auf dem $\mathbb{R}^n$ haben wir die folgende Kettenregel:

Satz: $D \subseteq \mathbb{R}^n$ sei eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $f \in \mathcal{C}^1(D,\mathbb{R})$. Für eine stetig differenzierbare Funktion $\gamma\colon (a,b) \to D$ gilt dann

$$\frac{d}{dt} f\bigl(\gamma(t)\bigr) = (\operatorname{grad} f)\bigl(\gamma(t)\bigr) \cdot \dot\gamma(t)\,.$$

Beweis: Nach Definition der Ableitung ist

$$\frac{d}{dt} f\bigl(\gamma(t)\bigr) = \lim_{h\to 0} \frac{f\bigl(\gamma(t+h)\bigr) - f\bigl(\gamma(t)\bigr)}{h}\,.$$

Da für jede der Komponenten γ_i

$$\gamma_i(t+h) = \gamma_i(t) + h\dot\gamma_i(t) + o(h)$$

ist, ist auch

$$\gamma(t+h) = \gamma(t) + h\dot\gamma(t) + o(h)\,,$$

wobei wir hier, einen üblichen Untugend folgend, einen Vektor, dessen sämtliche Komponenten $o(h)$ sind, kurz selbst mit $o(h)$ bezeichnet haben.

Damit ist, wegen der stetigen Differenzierbarkeit von f,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f\bigl(\gamma(t)\bigr) &= \lim_{h\to 0} \frac{f\bigl(\gamma(t)\bigr) + (\operatorname{grad} f)\bigl(\dot\gamma(t) + o(h)\bigr) - f\bigl(\gamma(t)\bigr)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(\operatorname{grad} f)\bigl(\dot\gamma(t)\bigr) + o(h)}{h} \\ &= (\operatorname{grad} f)\bigl(\gamma(t)\bigr) \cdot \dot\gamma(t)\,, \end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen wäre. ∎

b) Der Satz über implizite Funktionen

Hier geht es, wie bereits erwähnt, um die Auflösung einer Gleichung $f(\mathbf{x}) = 0$ nach einer der Variablen x_i. In einfachen Fällen ist dies trivial möglich, beispielsweise läßt sich

$$f(x, y, z) = ax + by + cz = 0$$

für $c \neq 0$ durch

$$z = \frac{-ax - by}{c}$$

nach z auflösen. In etwas komplizierteren Fällen, wie etwa bei

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 ,$$

kann man für die Punkte, die nicht auf der x-Achse $y = 0$ liegen, zumindest lokal eindeutig explizit auflösen durch

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2} ,$$

wobei das Vorzeichen gleich dem von y im betrachteten Intervall ist.

Im allgemeinen gibt es jedoch keine Möglichkeit für eine explizite Auflösung mit den „üblichen" mathematischen Funktionen, d.h. man kann höchstens dann auflösen, wenn man neue Funktionen einführt.

Wie das Beispiel der Kreislinie zeigt, ist auch das nicht immer möglich: Für die beiden Punkte auf der x-Achse gibt es offensichtlich keine *eindeutige* Auflösung, da sowohl die positive wie auch die negative Wurzel Teilauflösungen sind.

Diese Existenz mehrerer Teilauflösungen hängt mit dem Verschwinden der partiellen Ableitung nach y zusammen: Falls diese partielle Ableitung ungleich Null ist, gibt sie an, wie sich f verändert, wenn man y ändert, und sie gibt damit zumindest in erster Näherung auch an, wie man y verändern muß, um bei einer Änderung von x die Bedingung $f(x, y) = 0$ zu erhalten. Der Satz über implizite Funktionen besagt, das dieses Nichtverschwinden der partiellen Ableitung bereits ausreicht um die Existenz einer eindeutigen Auflösung zu zeigen:

Satz: $D \subseteq \mathbb{R}^2$ sei offen und $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$. Dann gibt es für jeden Punkt $(a, b) \in D$ mit $f(a, b) = 0$ und $f_y(a, b) \neq 0$ Umgebungen I von a und K von b sowie eine eindeutig bestimmte Funktion $g: I \to K$, so daß für alle $x \in I$ gilt:

$$f\bigl(x, g(x)\bigr) = 0 .$$

Die Funktion g ist stetig und differenzierbar; ihre Ableitung ist

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)} \quad \text{mit} \quad y = g(x) .$$

Beweis: Wir beginnen mit einer Reduktion zwecks Vereinfachung der Schreibarbeit: Offensichtlich genügt es, wenn wir den Fall $a = b = 0$ betrachten. Gilt nämlich der Satz für die Funktion

$$\widetilde{f}(x, y) = f(x - a, y - b)$$

im Punkt $(0, 0)$, so folgt er sofort auch für f im Punkt (a, b). Außerdem können wir o.B.d.A. annehmen, daß $f_y(0, 0)$ positiv ist, denn nach Voraussetzung ist es ungleich Null, und falls es negativ sein sollte, ersetzen wir einfach f durch $-f$.

Nach Voraussetzung sind die partiellen Ableitungen von f stetig; daher ist f_y nicht nur im Nullpunkt positiv, sondern auch noch in einer gewissen Umgebung davon. In dieser Umgebung wählen wir ein Rechteck

$$\bigl\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| -\alpha \le x \le \alpha \quad \text{und} \quad -\beta \le y \le \beta\bigr\} .$$

Da f_y auf diesem Rechteck überall positiv ist, wächst die Funktion $y \mapsto f(x_0, y)$ für jedes $x_0 \in [-\alpha, \alpha]$ streng monoton; wegen $f(0, 0) = 0$ ist insbesondere $f(0, -\beta) < 0$ und $f(0, \beta) > 0$. Aufgrund der Stetigkeit von f ist damit für x_0 aus einer gewissen Umgebung der Null auch $f(x_0, -\beta) < 0$ und $f(x_0, \beta) > 0$; indem wir nötigenfalls α noch etwas verkleinern, können wir annehmen, daß dies für alle $x_0 \in [-\alpha, \alpha]$ gilt.

Damit gibt es nach dem Zwischenwertsatz für jedes $x_0 \in [-\alpha, \alpha]$ ein y_0, so daß $f(x_0, y_0)$ verschwindet; wegen der strengen Monotonie der Funktion $y \mapsto f(x_0, y)$ ist dieser Wert y_0 eindeutig bestimmt. Wir setzen daher $I = (-\alpha, \alpha)$, $K = (-\beta, \beta)$ und

$$g: \begin{cases} I & \to K \\ x_0 & \mapsto y_0 \end{cases} .$$

Damit ist g als Funktion festgelegt, und nach Konstruktion ist

$$f\big(x, g(x)\big) = 0 \quad \text{für alle } x \in I\,.$$

Wir müssen uns noch überlegen, daß die so konstruierte Funktion g stetig und differenzierbar ist.

Die Stetigkeit können wir etwa dadurch nachweisen, daß wir für jede gegen ein $x \in I$ konvergierende Folge (x_n) aus I zeigen, daß

$$g\big(\lim_{n\to\infty} x_n\big) = \lim_{n\to\infty} g(x_n)$$

ist.

Sei $y = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)$. Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von f ist zunächst

$$\lim_{n\to\infty} f\big(x_n, g(x_n)\big) = f\big(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} g(x_n)\big) = f(x, y)\,.$$

Da die Zahlen $f\big(x_n, g(x_n)\big)$ allesamt Null sind, verschwindet auch ihr Grenzwert, also $f(x, y)$, und damit ist $y = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x)$ der eindeutig bestimmte Wert, für den $f(x, y)$ verschwindet, d.h. $y = g(x)$, wie gewünscht.

Somit ist g stetig; als nächstes müssen wir noch die Differenzierbarkeit zeigen. Für ein $x \in I$ und ein hinreichend kleines $h \in \mathbb{R}$, für das auch noch $x + h$ in I liegt, ist nach Definition von g

$$f\big(x + h, g(x + h)\big) = 0\,.$$

Andererseits können wir diesen Funktionswert auch nach dem Mittelwertsatz berechnen: Mit $k = g(x + h) - g(x)$ ist

$$f\big(x + h, g(x + h)\big) = f\big(x + h, g(x) + k\big) = f\Big(\big(x, g(x)\big) + \tbinom{h}{k}\Big)\,,$$

und wenn wir den Mittelwertsatz auf die Funktion

$$h(t) \underset{\text{def}}{=} f\Big(\big(x, g(x)\big) + t\tbinom{h}{k}\Big)$$

anwenden in der Form $h(1) = h(0) + h'(\tau)$ für ein τ zwischen null und eins, so ist mit $\xi = x + \tau h$ und $\eta = g(x) + \tau k$

$$f\big(x + h, g(x) + k\big) = f\big(x, g(x)\big) + hf_x(\xi, \eta) + kf_y(\xi, \eta)\,.$$

Da $f\big(x + h, g(x) + k\big)$ und $f\big(x, g(x)\big)$ beide verschwinden, folgt

$$\frac{g(x + h) - g(x)}{h} = \frac{k}{h} = -\frac{f_x(\xi, \eta)}{f_y(\xi, \eta)}\,.$$

Für $h \to 0$ geht die rechte Seite wegen der Stetigkeit der partiellen Ableitungen gegen $-f_x(x, y)/f_y(x, y)$, insbesondere existiert also der Grenzwert. (Man beachte, daß hier nochmals die Voraussetzung $f_y \neq 0$ benötigt wird). Damit existiert auch der Grenzwert des linksstehenden Differenzenquotienten für $h \to 0$, d.h. g ist differenzierbar und hat die behauptete Ableitung.

■

Nachdem wir wissen, daß die Ableitung von g existiert, ist ihre Berechnung, unabhängig vom gerade bewiesenen Satz, eine einfache Übungsaufgabe: Die Funktion $f\big(x, g(x)\big)$ ist gleich der Nullfunktion, und damit verschwindet natürlich auch ihre Ableitung. Andererseits ist diese Ableitung nach der Kettenregel gleich

$$f_x\big(x, g(x)\big) + f_y\big(x, g(x)\big) \cdot g'(x)\,,$$

also folgt

$$g'(x) = -\frac{f_x\big(x, g(x)\big)}{f_y\big(x, g(x)\big)}\,.$$

Genauso kann auch die zweite Ableitung von g berechnet werden –falls sie existiert. Wenn f und g zweimal stetig differenzierbar sind, können wir $f\big(x, g(x)\big)$ zweimal ableiten, was natürlich immer noch null ist, nach der Kettenregel aber (der Übersichtlichkeit halber jeweils ohne das Argument $\big(x, g(x)\big)$ geschrieben)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\big(f_x + f_y \cdot g'(x)\big) + \frac{\partial}{\partial y}\big(f_x + f_y \cdot g'(x)\big) \cdot g'(x) \\
&= f_{xx} + f_{yx} \cdot g'(x) + f_y \cdot g''(x) + \big(f_{xy} + f_{yy} \cdot g'(x)\big) \cdot g'(x)\,,
\end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned}
g''(x) &= -\frac{1}{f_y}\big(f_{xx} + 2f_{xy} \cdot g'(x) + f_{yy} \cdot g'(x)^2\big) \\
&= -\frac{1}{f_y^3}\big(f_{xx}^2 f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2\big)\,.
\end{aligned}$$

Für Extremwertbetrachtungen bei implizit definierten Funktionen braucht man die zweite Ableitung in den Punkten, in denen die erste verschwindet; dort vereinfacht sich die Formel zu

$$g''(x) = -\frac{f_{xx}}{f_y} \quad \text{falls} \quad g'(x) = 0\,.$$

Genau wie Funktionen einer Veränderlichen können auch Funktionen mehrerer Veränderlicher implizit definiert sein; die entsprechende Verallgemeinerung des Satzes über implizite Funktionen folgt fast aus der koordinatenweisen Anwendung des obigen Satzes, lediglich für die Stetigkeit der Funktion muß man das entsprechende Argument aus dem gerade beendeten Beweis noch einmal anwenden. Die Aussage ist

Satz: $D \subseteq \mathbb{R}^n$ sei eine offene Menge, $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$ eine stetig differenzierbare Funktion auf D, und $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in D$ sei ein Punkt mit $f(\mathbf{a}) = 0$. Falls $f_{x_n}(\mathbf{a}) \neq 0$ ist, gibt es ein eine offene Umgebung U von $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ in $\mathbb{R}^{n-1}$ und eine Funktion $g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, so daß für alle Punkte $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_{n-1}) \in u$ gilt:

$$f\big(\mathbf{y}, g(\mathbf{y})\big) = 0\,.$$

■

c) Lagrangesche Multiplikatoren

Wie bereits angekündigt, ist das eigentliche Ziel dieses Paragraphen die Behandlung von Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen. Unter Extremwerten sollen dabei *lokale* Extrema verstanden werden, so daß wir die üblichen Kriterien mit Ableitungen anwenden können.

Definition: Wir sagen, die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ auf einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ habe im Punkt $\mathbf{a} \in D$ ein lokales $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\}$ unter der Nebenbedinung $g = 0$, wobei $g\colon D \to \mathbb{R}$ eine weitere Funktion ist, wenn $g(\mathbf{a}) = 0$ ist und es eine Umgebung U von $\mathbf{a}$ gibt, so daß für alle $\mathbf{x} \in U$ gilt: Ist $g(\mathbf{x}) = 0$, so ist $f(\mathbf{x}) \left\{\begin{matrix}\le\\ \ge\end{matrix}\right\} f(\mathbf{a})$.

Als Einstiegsbeispiel betrachten wir eine beliebte Schulbuchaufgabe zur Minimumsbestimmung: Eine Konservendose soll bei einem vorgegebenen Volumen von 100 cm^3 möglichst wenig Blech benötigen, d.h. ihre Oberfläche soll minimal sein.

Die Oberfläche eines Zylinders der Höhe h mit einer Grundfläche vom Radius r ist

$$f(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h\,;$$

die Nebenbedingung für das Volumen $V = \pi r^2 h$ besagt, daß

$$g(r, h) = \pi r^2 h - 100 = 0$$

sein soll.

Hier läßt sich natürlich die Nebenbedingung sofort nach h auflösen:

$$h = \frac{100}{\pi r^2}\,,$$

und wir müssen nur noch die Funktion

$$F(r) = f\left(r, \frac{100}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{200}{r}$$

minimieren. Für diese ist

$$F'(r) = 4\pi r - \frac{200}{r^2}\,,$$

und dies verschwindet genau dann, wenn

$$4\pi r^3 = 200 \quad \text{oder} \quad r = \sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}$$

ist.

In diesem einfachen Fall kann man solche Aufgaben also zurückführen auf gewöhnliche Extremwertaufgaben, indem man die Nebenbedingung nach einer der Variablen auflöst und diese dann in f einsetzt; in anderen Fällen kann man gelegentlich die Nebendedingung durch geeignete Parameterwahl oder Wahl eines angepaßten Koordinatensystems berücksichtigen. Im allgemeinen wird aber beides nicht möglich sein, so daß wir andere Methoden brauchen.

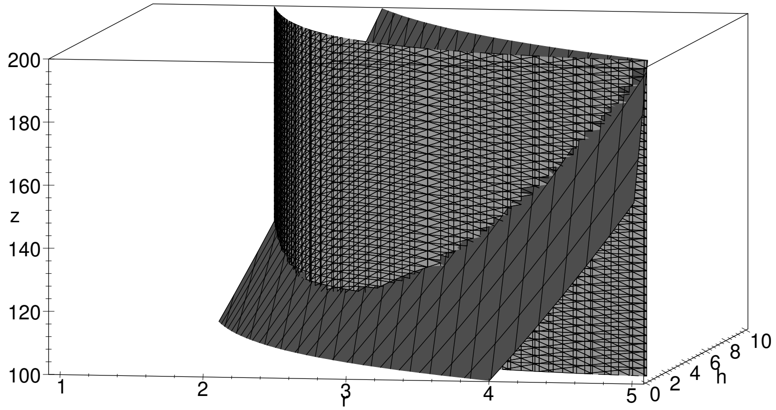


Abb. 17: Oberfläche einer Konservendose mit festem Volumen

Unser bisherige Theorie für lokale Extrema ist in dieser Situation nicht anwendbar, denn die lokalen Extrema von f werden nur in den seltensten Fällen die Nebenbedingung $g = 0$ erfüllen; im obigen Beispiel zeigt Abbildung 17 die Nebenbedingung als eng schraffierte Fläche dargestellt und der Graph von f als weiter schraffierte; wie man sieht, läßt sich der Wert von f problemlos verkleinern, wenn man nur die Fläche $g = 0$ verläßt, und in der Tat ist auch ohne jede Mathematik sofort klar, daß man mit weniger Blech auskommt, wenn man die Konservendose einfach schmäler oder kürzer macht.

Die Grundidee für ein alternatives Verfahren wird klar bei der Betrachtung der Niveaulinien in Abbildung 18: Die Niveaulinie für $g = 0$ ist gestrichelt eingezeichnet, verschiedene Niveaulinien von f als durchgezogene Kurven.

Wie man sieht, schneiden einige dieser Niveaulinien die gestrichelte Kurve überhaupt nicht: Wenn man zu wenig Blech hat, kann man keine Dose mit $100\,cm^3$ Inhalt zusammenlöten. Wenn es dagegen genug Blech gibt, gibt es gleich zwei Schnittpunkte: Die Dose kann entweder eher höher oder eher breiter gemacht werden. In einem solchen Fall kann man die Niveaulinie durch eine zu einem etwas niedrigeren Niveau ersetzen, die im allgemeinen auch wieder Schnittpunkte haben wird, so daß das

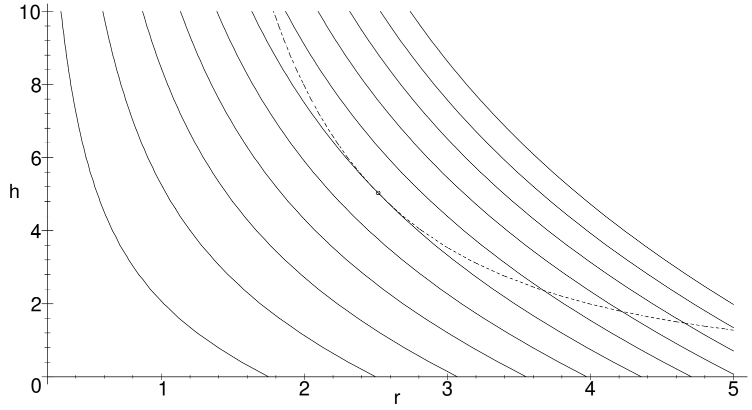


Abb. 18: Niveaulinien für Oberfläche und Volumen

Niveau noch nicht minimal sein kann. Erst wenn man im Minimum ist, fallen die beiden Schnittpunkte zusammen; wenn man nun das Niveau noch weiter erniedrigt, gibt es keine Schnittpunkte mehr.

Da somit im Minimum zwei Schnittpunkte zusammenfallen, berühren sich dort die Niveaulinien von f und von g, d.h. sie haben eine gemeinsame Tangente. Da der Gradient, wie wir wissen, senkrecht auf der Tangenten der Niveaulinien steht (die Richtungsableitung entlang einer Niveaulinie ist schließlich null), sind somit die Gradienten von f und g im Minimum zueinander parallel, d.h. der eine ist ein Vielfaches des anderen.

Dies gilt nicht nur im vorliegenden Beispiel, sondern allgemein:

Satz: $D \subseteq \mathbb{R}^n$ sei eine offene Menge und $f, g \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$ seien stetig differenzierbare Funktionen auf D. Falls f im Punkt $\mathbf{a} \in D$ ein Extremum hat unter der Nebenbedinung $g(\mathbf{x}) = 0$, so sind grad $f(\mathbf{a})$ und grad $g(\mathbf{a})$ linear abhängig.

Beweis: Die Grundidee ist einfach: Auch wenn wir die Nebenbedingung nicht *explizit* nach einer der Variablen auflösen können, sagt uns der Satz über implizite Funktionen in vielen Fällen dennoch, daß zumindest lokal eine Auflösung existiert. Diese Auflösung kennen wir zwar nicht, aber wir können mit ihr argumentieren und, zumindest formal, auch rechnen.

Falls grad $g(\mathbf{a})$ der Nullvektor ist, gibt es nichts mehr zu beweisen, denn jede Menge, die den Nullvektor enthält, ist linear abhängig.

Wir können daher annehmen, daß grad $g(\mathbf{a})$ mindestens eine von Null verschiedene Komponente hat, und durch Umnummerierung der Koordinaten können wir auch o.B.d.A. annehmen, daß die n-te Komponente nicht verschwindet, d.h. $g_{x_n}(\mathbf{a}) \neq 0$.

Dann gibt es nach dem Satz über implizite Funktionen eine Umgebung U von $(a_1, \dots, a_{n-1})$ und eine Funktion $h: U \to \mathbb{R}$ mit $h(a_1, \dots, a_{n-1}) = a_n$, so daß

$$g\big(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1})\big) = 0 \quad \text{für alle } (x_1, \dots, x_{n-1}) \in U\,.$$

Nachdem f in $\mathbf{a}$ ein lokales Extremum unter der Nebenbedinung $g = 0$ hat, nimmt die Funktion

$$F(x_1, \dots, x_{n-1}) \underset{\text{def}}{=} f\big(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1})\big)$$

in $(a_1, \dots, a_{n-1})$ ein lokales Extremum im üblichen Sinne an, d.h. der Gradient von F verschwindet dort.

Nach der Kettenregel ist für $i = 1, \dots, n-1$

$$F_{x_i}(a_1, \dots, a_{n-1}) = f_{x_i}(\mathbf{a}) + f_{x_n}(\mathbf{a}) \cdot h_{x_i}(a_1, \dots, a_{n-1})\,,$$

und nach dem Satz über implizite Funktionen ist $h_{x_i} = -g_{x_i}/g_{x_n}$, d.h.

$$F_{x_i}(a_1, \dots, a_{n-1}) = f_{x_i}(\mathbf{a}) - f_{x_n}(\mathbf{a}) \frac{g_{x_i}(\mathbf{a})}{g_{x_n}(\mathbf{a})}\,.$$

Da die linke Seite verschwindet, gilt dasselbe auch für die rechte. Die rechte Seite ist im Gegensatz zur linken auch für $i = n$ definiert und verschwindet aus trivialen Gründen; also ist für alle i

$$f_{x_i}(\mathbf{a}) - \frac{f_{x_n}(\mathbf{a})}{g_{x_n}(\mathbf{a})} g_{x_i}(\mathbf{a}) = 0$$

oder, anders ausgedrückt,

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{a}) - \frac{f_{x_n}(\mathbf{a})}{g_{x_n}(\mathbf{a})} \operatorname{grad} g(\mathbf{a}) = \vec{0}\,.$$

Also sind die beiden Gradienten in der Tat linear abhängig. ■

Falls der Gradient von g im Punkt $\mathbf{a}$ nicht verschwindet, gibt es somit eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{a}) + \lambda \operatorname{grad} g(\mathbf{a}) = \vec{0}$$

ist, nämlich

$$\lambda = -\frac{f_{x_n}(\mathbf{a})}{g_{x_n}(\mathbf{a})}\,.$$

Diese Zahl bezeichnet man nach dem französischen Mathematiker JOSEPH LOUIS LAGRANGE (1736–1813) als den LAGRANGEschen Multiplikator; er gibt an, wie stark sich eine Änderung der Nebenbedingung auf die Änderung des Extremwerts auswirkt.

Zur praktischen Bestimmung von Extremwerten unter Nebenbedingungen geht man wie folgt vor: Über die Punkte, in denen der Gradient von g verschwindet, macht obiger Satz keine verwertbare Aussage; diese Punkte müssen also vorab berechnet und untersucht werden.

Danach müssen die Punkte gefunden werden, in denen es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so daß

$$\begin{aligned} f_{x_1}(\mathbf{x}) + \lambda g_{x_1}(\mathbf{x}) &= 0 \\ &\vdots \\ f_{x_n}(\mathbf{x}) + \lambda g_{x_n}(\mathbf{x}) &= 0 \\ g(\mathbf{x}) &= 0 \end{aligned}$$

ist. Dies ist ein System von $n+1$ Gleichungen für die $n+1$ Unbekannten, allerdings ist dieses Gleichungssystem nur selten linear und damit oft nicht mit bekannten Methoden lösbar. Manchmal kann man das Gleichungssystem durch geeignete Umformungen und Fallunterscheidungen vollständig lösen, in anderen Fällen helfen nur die aus der Numerik bekannten Näherungsverfahren wie etwa die Methode von NEWTON-RALSTON.

Falls alle Gleichungen Polynomgleichungen sind (oder durch Einführung geeigneter zusätzlicher Variablen auf Polynomgleichungen zurückgeführt werden können), kann man im Falle einer endlichen Lösungsmenge diese auch exakt bestimmen: Genau wie der GAUSS-Algorithmus zur Lösung eines linearen Gleichungssystems dieses auf eine Treppengestalt bringt, aus der man die Lösungen einfach ermitteln kann, gibt es in der Computeralgebra einen Algorithmus, der dasselbe für beliebige Systeme von Polynomgleichungen versucht; die Gleichungen, die dieser Algorithmus liefert, bezeichnet man als GRÖBNER-Basis oder Standardbasis. Zum Verständnis dieses Algorithmus (und seiner zahlreichen Varianten) sind Kenntnisse der kommutativen Algebra erforderlich, für die die Zeit in dieser Vorlesung nicht ausreicht; bei einigen Implementierungen werden auch Algorithmen aus der Informatik eingesetzt, die typischerweise nicht in Grundvorlesungen behandelt werden. Deshalb sei hier nur darauf hingewiesen, daß die gängigen universellen Computeralgebrasysteme wie Maple, Mathematica, MuePad allesamt entsprechende Routinen enthalten, mit denen man auch dann experimentieren kann, wenn man die dahinterstehende Theorie nicht versteht.

Als Beispiel, wie gelegentlich auch ein nichtlineares Gleichungssystem elementar gelöst werden kann, betrachten wir eine Anwendung aus den Wirtschaftswissenschaften: Die Gesamtproduktion eines Unternehmens oder eines Staates in Abhängigkeit von n eingesetzten Ressourcen $x_1, \ldots, x_n$ wird oft modelliert durch eine sogenannte COBB-DOUGLAS-Funktion

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \alpha x_1^{e_1} \ldots x_n^{e_n} ,$$

benannt nach den beiden Wissenschaftlern, die dieses Modell 1928 für die amerikanische Gesamtproduktion in Abhängigkeit von Kapital und Arbeit in den Jahren 1899 bis 1922 entwickelten. (Sie fanden $P \approx 1{,}01 A^{3/4} K^{1/4}$ mit A = Anzahl der Beschäftigten und K = Kapitaleinsatz.)

Betrachten wir stattdessen die Produktion eines Wirtschaftsguts aus zwei Resourcen x, y gemäß der Funktion

$$P(x, y) = x^{1/2} y^{1/4} .$$

Falls wir der Einfachheit halber annehmen, daß die Kosten für x und y gleich derselben Einheit sind und die Gesamtausgaben höchstens zwölf Einheiten betragen dürfen, müssen wir somit f maximieren unter der Nebenbedingung

$$x + y \leq 12 .$$

Nun ist aber f eine monoton wachsende Funktion sowohl von x als auch von y, d.h. die maximale Produktion wird sicherlich erreicht in einem

Punkt, für den $x + y = 12$ ist, d.h wir können die Nebenbedingung in der gewohnten Form

$$g(x, y) = x + y - 12 = 0$$

schreiben. Diese Nebenbedingung sowie die zu maximierende Funktion sind in Abbildung 19 dargestellt.

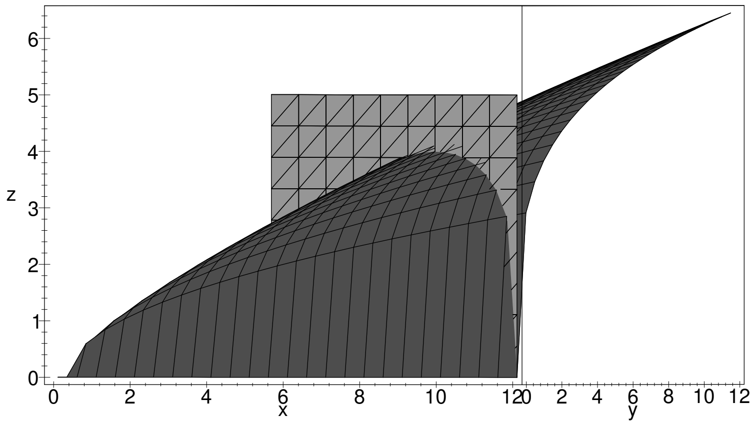


Abb. 19: Maximierung einer Produktionsfunktion bei festem Kapitaleinsatz

Ableitung beider Funktionen zeigt, daß

$$\operatorname{grad} g = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \frac{y^{1/4}}{2x^{1/2}} \\ \frac{x^{1/2}}{4y^{3/4}} \end{pmatrix}$$

ist; das zu lösende Gleichungssystem wird also zu

$$\begin{aligned} \frac{y^{1/4}}{2x^{1/2}} + \lambda &= 0 \\ \frac{x^{1/2}}{4y^{3/4}} + \lambda &= 0 \\ x + y - 12 &= 0 \end{aligned} .$$

(Die Nenner brauchen uns nicht zu stören, denn da $f(0, y) = f(x, 0) = 0$ ist, kommen Lösungen mit $x = 0$ oder $y = 0$ für das Maximum ohnehin nicht in Frage; wir können sie also ruhig ausschließen.)

Als Ansatz zu einer möglichen Lösung können wir ausnutzen, daß λ in den beiden ersten Gleichungen isoliert steht; wenn wir danach auflösen und gleichsetzen, erhalten wir die Gleichung

$$\frac{y^{1/4}}{2x^{1/2}} = \frac{x^{1/2}}{4y^{3/4}} .$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner macht daraus

$$4y^{1/4}y^{3/4} = 2x^{1/2}x^{1/2} \quad \text{oder} \quad 2y = x .$$

Einsetzen in die dritte Gleichung ergibt $3y = 12$, also ist

$$y = 4 \quad \text{und} \quad x = 8 .$$

§4: Vektorwertige Funktionen mehrer Veränderlicher

Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ auf einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ läßt sich für $n, m \geq 2$ nicht mehr durch einen Graphen veranschaulichen, denn der Graph

$$\Gamma_f = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \right\}$$

liegt dann im mindestens vierdimensionalen $\mathbb{R}^{n+m}$.

Im für uns wichtigsten Fall $n = m = 2$ oder 3 gibt es aber eine andere Möglichkeit der Veranschaulichung: Für $\mathbf{x} \in D$ läßt sich $f(\mathbf{x})$ als Vektor auffassen, und f kann veranschaulicht werden, indem man für hinreichend viele Punkte $\mathbf{x} \in D$ diesen Vektor (oder ein geeignetes konstantes Vielfaches davon) im Punkt $\mathbf{x}$ anträgt; siehe dazu die Abbildungen 20 und 21.

Wie Abbildung 21 zeigt, kann es dabei bei betragsmäßig stark variierenden Funktionswerten zu Problemen kommen: Wie man die Konstante auch wählt, mit der alle Vektoren multipliziert werden, hat man immer entweder einige extrem lange Vektoren oder aber Vektoren, die so kurz sind, daß man nichts mehr erkennen kann: Ab einer gewissen Entfernung vom Zentrum sind die Richtungen des Felds praktisch nicht mehr wahrnehmbar.

Da gerade die Richtung sehr wesentlich für die Konstruktion der Feldlinien ist, begnügt man sich daher oft auch damit, nur die Richtungen

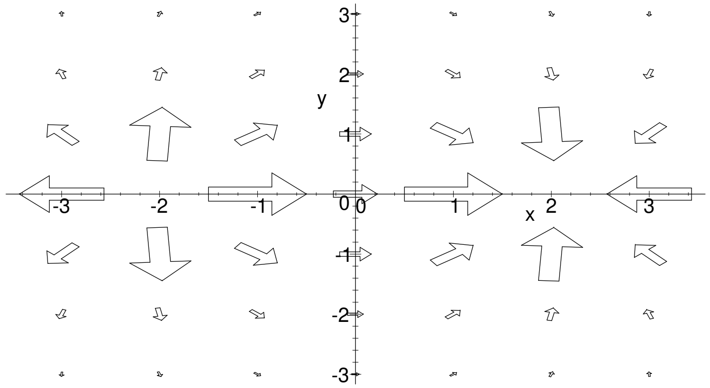


Abb. 20: Das elektrische Feld zweier entgegengesetzt gleicher Punktladungen

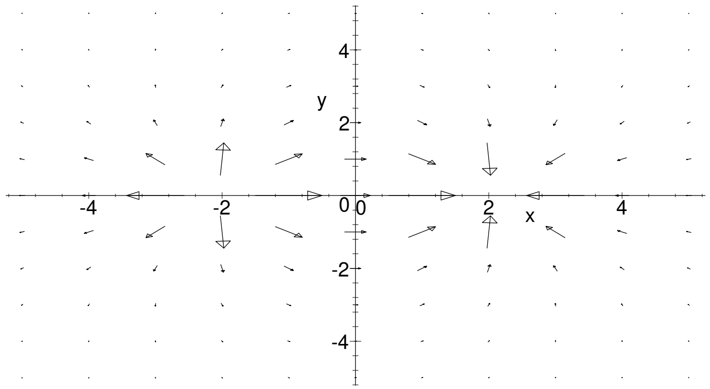


Abb. 21: Dasselbe Feld in einem größeren Bereich

darzustellen, ansonsten aber sämtlichen Vektoren dieselbe Länge zu geben; siehe dazu etwa Abbildung 22. Dadurch geht zwar ein Teil der Information verloren, aber das entsprechende Bild kann trotzdem oft mehr aussagen, als eines, bei dem fast alle Pfeile visuell zu Punkten degeneriert sind. Auch bei der Darstellung als Richtungsfeld müssen allerdings natürlich alle Punkte $\mathbf{x}$, für die $f(\mathbf{x}) = (0, \ldots, 0)$ ist, durch

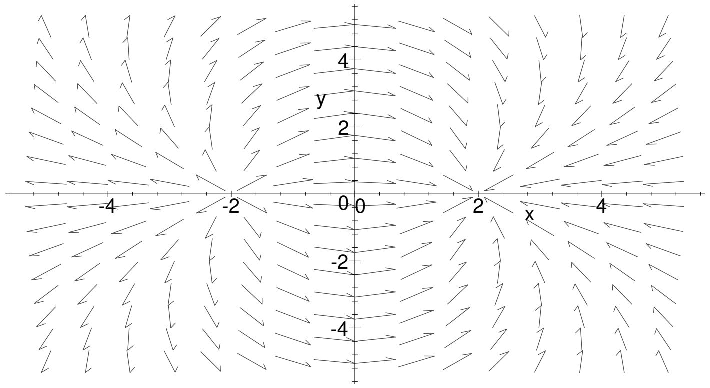


Abb. 22: Das Richtungfeld zum obigen Feld

Punkte oder überhaupt nicht dargestellt werden, denn dort gibt es keine Richtung.

a) Der Begriff des Vektorfelds

Nicht nur zur Veranschaulichung kann es nützlich sein, die Werte einer Funktion als Vektoren zu betrachten: Die für uns wichtigsten Beispiele von Funktionen mehrerer Veränderlicher, deren Wert nicht in $\mathbb{R}$ sondern in einem $\mathbb{R}^n$ liegt, sind die aus der Physik bekannten Felder wie etwa ein Kraftfeld, ein elektrisches Feld oder ein Magnetfeld. Da solche Felder typischerweise als Vektoren geschrieben werden, schreiben wir deshalb in diesem Paragraphen die *Funktionswerte* vektoriell, wohingegen die Argumente weiterhin Punkte sind, die als Tupel geschrieben werden. Wir betrachten somit Funktionen

$$\vec{V}: D \to \mathbb{R}^m; \quad \mathbf{x} \mapsto \vec{V}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} V_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ V_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix},$$

wobei die Komponentenfunktionen $V_i: D \to \mathbb{R}$ genau die im vorigen Paragraphen betrachteten skalarwertigen Funktionen mehrerer Veränderlicher sind.

Der mathematische Begriff, der physikalische Felder beschreibt, ist der des Vektorfelds:

Definition: Ein Vektorfeld auf der Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine Funktion $\vec{V}: D \to \mathbb{R}^n$.

(Da die typischen elektromagnetischen Felder wie $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$ oder auch das Kraftfeld $\vec{F}$ üblicherweise durch Großbuchstaben bezeichnet werden, verwenden wir auch für Vektorfelder meist Großbuchstaben wie $\vec{V}$ oder $\vec{W}$.)

b) Die Jacobi-Matrix

Wir werden uns in diesem Paragraphen hauptsächlich mit Vektorfeldern im $\mathbb{R}^3$ beschäftigen, zumindest die grundlegenden Definitionen sollen aber für beliebige Funktionen aus dem $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^m$ betrachtet werden. Fast von selbst versteht sich die

Definition: Eine Funktion $\vec{f}: D \to \mathbb{R}^m$ auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt stetig *bzw.* differenzierbar, wenn alle Komponentenfunktionen f_i stetig *bzw.* differenzierbar sind. Entsprechend definieren wir auch die Menge $\mathcal{C}^k(D, \mathbb{R}^m)$ aller k-fach stetig differenzierbarer Funktionen von D nach $\mathbb{R}^m$ als Menge aller Funktionen, deren Komponenten $f_i \in \mathcal{C}^k(D, \mathbb{R})$ k-mal stetig differenzierbar sind.

Man überlegt sich leicht, daß $\mathcal{C}^k(D, \mathbb{R}^m)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist; wer sich noch aus **[HM1],** *Kapitel 2,* §*6i* an direkte Summen von Vektorräumen erinnert, sieht auch sofort, daß

$$\mathcal{C}^k(D, \mathbb{R}^m) = \mathcal{C}^k(D, \mathbb{R})^m = \mathcal{C}^k(D, \mathbb{R}) \oplus \cdots \oplus \mathcal{C}^k(D, \mathbb{R})$$

ist, wobei auf der rechten Seite genau m Summanden stehen.

Damit wissen wir, was Differenzierbarkeit einer Funktion $\vec{f}: D \to \mathbb{R}^n$ bedeutet; was aber ist die Ableitung?

Bei skalarwertigen Funktionen einer oder mehrerer Veränderlicher hatten wir die Ableitung jeweils als Linearisierung der Funktion in der

Umgebung des betrachteten Punkts definiert; genauso gehen wir auch hier vor: Für jede der Komponentenfunktion f_i ist

$$f_i(\mathbf{x}+\vec{h}) = f_i(\mathbf{x}) + \operatorname{grad} f_i(\mathbf{x}) \cdot \vec{h} + o\big(|\vec{h}|\big)\,,$$

wobei der Punkt hier für das Skalarprodukt von Vektoren steht. Im Hinblick auf vektorwertige Funktionen ist es aber besser, anstelle des Skalarprodukt ein Matrixprodukt zu verwenden; dazu müssen wir den Gradienten als Zeilenvektor schreiben, d.h. wenn $\cdot$ das Matrixprodukt bezeichnet, ist

$$f_i(\mathbf{x}+\vec{h}) = f_i(\mathbf{x}) + {}^t\!\operatorname{grad} f_i(\mathbf{x}) \cdot \vec{h} + o\big(|\vec{h}|\big)\,.$$

In dieser Notation können wir die als Zeilenvektoren aufgefaßten Gradienten zu einer $n \times n$-Matrix zusammenfassen, der nach dem deutsche Mathematiker CARL GUSTAV JACOB JACOBI (1804–51) benannten JACOBI-Matrix

$$J_{\vec{f}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} {}^t\!\operatorname{grad} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ {}^t\!\operatorname{grad} f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Mit dieser Matrix ist dann

$$\vec{f}(\mathbf{x}+\vec{h}) = f(\mathbf{x}) + J_{\vec{f}}(\mathbf{x}) \cdot \vec{h} + o\big(|\vec{h}|\big)\,,$$

wobei hier das Produkt als Matrixprodukt zu verstehen wird und das Symbol $o\big(|\vec{h}|\big)$ schlampigerweise auch für einen Vektor benutzt wird, dessen sämtliche Komponenten $o\big(|\vec{h}|\big)$ sind.

Wegen der oben angegebenen expliziten Form der JACOBI-Matrix wird diese in einigen Lehrbüchern auch in der Form

$$J_{\vec{f}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$$

geschrieben.

c) Die Divergenz eines Vektorfelds

Für ein Vektorfeld $\vec{V}\colon D \to \mathbb{R}^n$ ist die JACOBI-Matrix quadratisch, wir können daher von symmetrischen und antisymmetrischen Matrizen reden.

(Zur Erinnerung: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt symmetrisch, wenn sie gleich ihrer transponierten Matrix ist, d.h. $a_{ij} = a_{ji}$ für alle Indexpaare ij, und sie heißt antisymmetrisch, wenn sie gleich dem Negativen ihrer transponierten Matrix ist, d.h. $a_{ij} = -a_{ji}$ und damit insbesondere auch $a_{ii} = -a_{ii} = 0$ für alle i.)

Eine beliebige Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ läßt sich als Summe einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Matrix schreiben:

$$M = S + A \quad \text{mit} \quad S = \tfrac{1}{2}(M + {}^tM) \quad \text{und} \quad A = \tfrac{1}{2}(M - {}^tM)\,.$$

In diesem Abschnitt wollen wir den symmetrischen Anteil S der JACOBI-Matrix genauer untersuchen, im nächsten den antisymmetrischen Anteil A vor allem im Fall $n = 3$.

Für kleine Vektoren $\vec{h}$ ist nach obiger Formel

$$\vec{V}(\mathbf{x}+\vec{h}) = V(\mathbf{x}) + J_{\vec{V}}(\mathbf{x})\vec{h} + o\big(|\vec{h}|\big) = \vec{V}(\mathbf{x}) + S\vec{h} + A\vec{h} + o\big(|\vec{h}|\big)\,.$$

Nach **[HM1]**, *Kapitel 2, §8d,* sind alle Eigenwerte der symmetrischen Matrix S reell, und der $\mathbb{R}^n$ hat eine Basis aus Eigenvektoren von S.

Falls alle Eigenwerte von S positiv sind, hat die vom symmetrischen Teil der JACOBI-Matrix beschriebene Änderung $S\vec{h}$ des Feldes für jeden Eigenvektor $\vec{h}$ dieselbe Richtung wie $\vec{h}$, zeigt also weg vom Punkt $\mathbf{x}$, wie dies im linken Teil von Abbildung 23 zu sehen ist. Da es eine Basis aus Eigenvektoren gibt, gilt zumindest letzteres auch für beliebige Vektoren $\vec{h}$; man bezeichnet $\mathbf{x}$ daher in so einem Fall als eine *Quelle* des Vektorfelds $\vec{V}$.

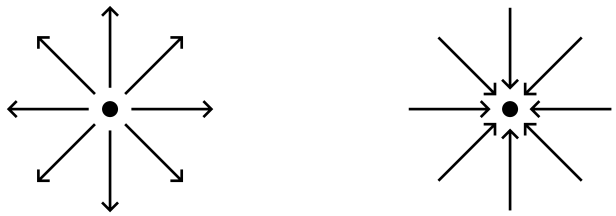


Abb. 23: Quellen und Senken

Falls alle Eigenvektoren negativ sind, gehen die Änderungen jeweils in Gegenrichtung, es sieht also ungefähr so aus wie im rechten Teil von Abbildung 23, und man spricht von einer *Senke.*

Im allgemeinen werden weder *alle* Eigenwerte positiv noch *alle* Eigenwerte negativ sein; als Maßzahl für die Eigenschaft eines Punktes eher eine Quelle oder eher eine Senke zu sein, bietet sich dann die *Summe* aller Eigenwerte von S an:

Definition: Die *Divergenz* $\operatorname{div}\vec{V}(\mathbf{x})$ eines Vektorfelds $\vec{V}$ im Punkt $\mathbf{x}$ ist die Summe der Eigenwerte des symmetrischen Anteils der JACOBI-Matrix $J_{\vec{V}}(\mathbf{x})$. Falls sie im gesamten Definitionsbereich von $\vec{V}$ verschwindet, bezeichnen wir das Feld als *quellenfrei.*

Mit Beispielen wollen wir warten, bis wir diese Definition besser verstanden haben und auch den antisymmetrischen Anteil der JACOBI-Matrix mitbehandeln können.

Gelegentlich, aber selten, liest man statt *Divergenz* auch das Wort *Quellendichte.*

Die obige Definition macht zwar klar, worum es bei der Divergenz geht, sie ist aber nicht sonderlich gut zu deren Berechnung geeignet: Die Bestimmung aller Eigenwerte einer Matrix kann schließlich ziemlich aufwendig sein. Für die *Summe* der Eigenwerte gibt es glücklicherweise ein sehr viel einfacheres Verfahren:

Satz: Die Matrix $M = (m_{ij}) \in k^{n\times n}$ über dem Körper k habe die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Dann ist

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = m_{11} + \cdots + m_{nn} .$$

(Man beachte, daß hier nicht vorausgesetzt wurde, daß die Eigenwerte λ_i in k liegen; für eine beliebige reelle Matrix etwa sind die Eigenwerte ja bekanntlich im allgemeinen *komplexe* Zahlen. Auch bei beliebigen Körpern k gibt es stets einen Erweiterungskörper K, über dem das charakteristische Polynom – mit Vielfachheit gezählt – n Nullstellen hat, allerdings wollen wir hier auf Einzelheiten nicht eingehen.)

Beweis: Die Eigenwerte von M sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\det(M - \lambda E)$, wobei $E \in k^{n\times n}$ die Einheitsmatrix bezeichnet. Mit

$$c_{ij} = \begin{cases} m_{ij} & \text{falls } i \neq j \\ m_{ii} - \lambda & \text{falls } i = j \end{cases}$$

ist dann

$$\det(M - \lambda E) = \sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\pi) c_{1\pi(1)} \cdots c_{n\pi(n)} .$$

Falls π die Identität ist, erhalten wir den Summanden

$$(m_{11} - \lambda)\cdots(m_{nn} - \lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\sum_{i=1}^n m_{ii}\lambda^{n-1} + P(\lambda) ,$$

wobei $P(\lambda)$ ein Polynom vom Grad kleiner oder gleich $n - 2$ ist.

Falls π eine nichtidentische Permutation ist, gibt es mindestens zwei Zahlen i, so daß $\pi(i) \neq i$ ist, denn gäbe es nur eine, so müßte auch diese wegen der Bijektivität von π auf sich selbst abgebildet werden, d.h. π wäre doch gleich der Identität. Damit gibt es im Produkt

$$c_{1\pi(1)} \cdots c_{n\pi(n)}$$

mindestens zwei Faktoren, in denen $c_{i\pi(i)} = m_{i\pi(i)}$ ist und somit höchstens $n - 2$ Faktoren, in denen λ vorkommen kann, das Produkt ist also ein Polynom vom Grad höchstens $n - 2$ in λ. Damit ist insgesamt

$$\begin{aligned} \det(M - \lambda E) &= \sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\pi) c_{1\pi(1)} \cdots c_{n\pi(n)} \\ &= (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\sum_{i=1}^n m_{ii}\lambda^{n-1} + Q(\lambda) , \end{aligned}$$

wobei auch $Q(\lambda)$ ein Polynom vom Grad kleiner oder gleich $n - 2$ ist.

Wir können das charakteristische Polynom aber auch aus den Eigenwerten berechnen: Jedes Polynom n-ten Grades mit Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ hat die Form

$$\alpha(\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_n) ,$$

wobei α der Koeffizient von λ^n ist. Somit ist

$$\begin{aligned}\det(M-\lambda E) &= (-1)^n(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n)\\ &= (-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)\cdot\lambda^{n-1}+R(\lambda)\,,\end{aligned}$$

wobei auch $R(\lambda)$ wieder ein Polynom vom Grad höchstens $n-2$ ist. Also ist der Koeffizient von λ^{n-1} wirklich gleich der Summe der Eigenwerte; da wir aber oben auch gezeigt haben, daß er gleich der Summe der Diagonalelemente von M ist, folgt

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n m_{ii}\,,$$

wie behauptet.

■

Somit ist die Summe aller Eigenwerte einer Matrix gleich der Summe ihrer Diagonalelemente. Da sich Eigenwerte bei einem Basiswechsel nicht ändern, kann sich auch die Summe der Diagonalelemente bei einem Basiswechsel nicht ändern, sie ist daher – wie auch die Determinante und die Eigenwerte – nur von der durch die Matrix vermittelten linearen Abbildung abhängig und hat daher als wichtige Invariante einer linearen Abbildung Anspruch auf einen eigenen Namen:

Definition: Die Summe der Diagonalelemente einer quadratischen Matrix $M=(m_{ij})$ heißt *Spur* der Matrix, in Zeichen

$$\operatorname{Spur} M = \sum_{i=1}^n m_{ii}\,.$$

Auf englisch heißt Spur *trace* (auf französisch, abgesehen von der etwas anderen Aussprache auch), daher findet man in vielen (teilweise sogar deutschen) Texten auch die Abkürzung tr M. Leute, die zu faul sind, das Wort Spur auszuschreiben, kürzen es auch gelegentlich ab mit Sp.

Nach obigem Satz ist die Spur einer Matrix gleich der Summe ihrer Eigenwerte, genau wie die Determinate gleich deren Produkt ist. Beide

sind invariant unter Basiswechsel, d.h. für eine invertierbare Matrix $C\in k^{n\times n}$ ist

$$\det C^{-1}MC = \det M \quad\text{und}\quad \operatorname{Spur} C^{-1}MC = \operatorname{Spur} M\,.$$

Nach diesem Ausflug zurück zur linearen Algebra des letzten Semesters wenden wir uns wieder dem augenblicklichem Thema zu, der JACOBI-Matrix eines Vektorfelds. Nach dem gerade bewiesenen Satz ist die Divergenz des Vektorfelds gleich der Spur des symmetrischen Anteils S der JACOBI-Matrix, was ihre Berechnung deutlich vereinfacht. Tatsächlich ist die Situation sogar noch ein bißchen besser: Da alle Diagonaleinträge einer antisymmetrischen Matrix verschwinden, sind die Diagonaleinträge des symmetrischen Anteils gleich denen der JACOBI-Matrix selbst, d.h. die Divergenz ist einfach gleich der Spur der JACOBI-Matrix. Damit läßt sie sich leicht explizit angeben:

$$\operatorname{div}\vec V(\mathbf{x}) = \operatorname{Spur} J_{\vec V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V_1}{\partial x_1}(\mathbf{x})+\cdots+\frac{\partial V_n}{\partial x_n}(\mathbf{x})\,.$$

d) Die Rotation eines dreidimensionalen Vektorfelds

Im vorigen Abschnitt haben wir den antisymmetrischen Anteil der JACOBI-Matrix einfach vernachlässigt; dies ist natürlich im allgemeinen nicht zulässig. Hier wollen wir diesen Anteil genauer untersuchen. Wie sich gleich herausstellen wird, ist er im für Anwendungen besonders wichtigen Fall $n=3$ besonders einfach zu beschreiben; daher werden wir uns im wesentlichen auf diesen Fall beschränken.

Eine antisymmetrische 3×3-Matrix A hat die Form

$$A=\begin{pmatrix}0&\alpha&\beta\\-\alpha&0&\gamma\\-\beta&-\gamma&0\end{pmatrix}.$$

Für einen Vektor $\vec x\in\mathbb{R}^3$ ist daher

$$A\vec x=\begin{pmatrix}0&\alpha&\beta\\-\alpha&0&\gamma\\-\beta&-\gamma&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha y+\beta z\\-\alpha x+\gamma z\\-\beta x-\gamma y\end{pmatrix}.$$

Diese spezielle Form des Matrix-Vektor-Produkts sollte Erinnerungen an das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$ wecken: Nach **[HM1]**, *Kapitel 2,* §1, ist

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix} ,$$

d.h.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma \\ \beta \\ -\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

Somit entspricht im Dreidimensionalen die Multiplikation mit einer schiefsymmetrischen Matrix genau dem Vektorprodukt; da das Vektorprodukt nur im Dreidimensionalen erklärt werden kann, ist dies auch nur dort der Fall und erklärt, warum wir uns in diesem Abschnitt auf den dreidimensionalen Fall beschränken.

Wir wissen somit, daß es im Dreidimensionalen einen Vektor $\vec{a}$ gibt, so daß für einen kleinen Vektor $\vec{h}$

$$\vec{V}(\mathbf{x} + \vec{h}) = \vec{V}(\mathbf{x}) + S\vec{h} + \vec{a} \times \vec{h} + o(|\vec{h}|)$$

ist, wobei S der symmetrische Anteil der JACOBI-Matrix ist. Wir wissen aber noch nicht, wie $\vec{a} \times \vec{h}$ anschaulich interpretiert und damit verstanden werden kann.

Nach Definition des Vektorprodukts in **[HM1]**, *Kapitel 2,* §1, steht $\vec{a} \times \vec{h}$ senkrecht sowohl auf $\vec{a}$ als auch auf $\vec{h}$. Bedenkt man nun noch, daß Vektoren Äquivalenzklassen von Pfeilen sind, die man sich nicht unbedingt so vorstellen muß, daß sie alle im selben Punkt beginnen, bietet sich folgende Interpretation an: Wenn wir den Vektor $\vec{h}$ um die von $\vec{a}$ aufgespannte Achse drehen, zeigt $\vec{a} \times \vec{h}$ in Richtung der Tangente der Bahn des Endpunkts von $\vec{h}$. (Damit dies stimmt, muß die Achse so orientiert werden, daß sich $\vec{h}$ im mathematisch positiven, d.h. Gegenuhrzeigersinn, um $\vec{a}$ dreht. Von der Ebene der Uhr aus gesehen zeigt dann $\vec{a}$

nach oben, $\vec{h}$ zu dem sich drehenden Punkt, und $\vec{a} \times \vec{h}$ in Richtung des Gegenuhrzeigersinns, wie man sich z.B. mit der Dreifingerregel leicht veranschaulicht.)

Der antisymmetrische Anteil der JACOBI-Matrix sollte also etwas mit einer Drehbewegung zu tun habe, genauer gesagt mit deren Geschwindigkeitsvektor, denn dieser zeigt in Richtung der Tangente der Bahnkurve.

Um dies genauer zu untersuchen, betrachten wir zunächst eine einfache Drehung eines Vektors um die z-Achse mit Drehwinkel φ. Diese ist aufgrund der Definition von Sinus und Cosinus ausdrückbar durch die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} x &\mapsto \quad x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y &\mapsto -x\sin\varphi + y\cos\varphi \ . \\ z &\mapsto \quad z \end{aligned}$$

Als nächstes wollen wir einen Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ um eine beliebige Achse drehen; der Drehwinkel sei weiterhin φ. Dazu sei $\vec{a}$ der Einheitsvektor in Richtung der Achse; er sei so orientiert, daß der Drehsinn (bei positivem Winkel φ) gleich dem Gegenuhrzeigersinn ist. Dann gelten in den auf $\vec{a}$ senkrecht stehenden Ebenen im wesentlichen dieselbe Formeln, falls wir nur die Koordinateneinheitsvektoren der x- und der y-Achse ersetzen durch zwei aufeinander und auf $\vec{a}$ senkrecht stehende gleichlange Vektoren. Als ein solcher Vektor bietet sich der Verbindungsvektor $\vec{r}$ von der Achse zum Punkt $\mathbf{x}$ an, d.h. jener Vektor, der den Abstand zwischen $\mathbf{x}$ und der Achse beschreibt. Ein sowohl auf $\vec{r}$ als auch auf $\vec{a}$ senkrecht stehender Vektor ist $\vec{r}^* = \vec{a} \times r$; da $\vec{a}$ die Länge eins hat, ist $\vec{r}^*$ genauso lang wie $\vec{r}$.

In der von $\vec{r}$ und $\vec{r}^*$ aufgespannten Ebene bildet die Drehung um den Winkel φ somit den Vektor $\alpha\vec{r} + \beta\vec{r}^*$ ab auf

$$(\alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi)\vec{r} + (-\alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi)\vec{r}^* \ .$$

Nun zerlegen wir den Ortsvektor $\vec{x}$ eines Punktes $\mathbf{x}$ in einen Vektor $\vec{x}_a$ auf der Achse und den radialen, d.h. senkrecht auf der Achse stehenden, Anteil $\vec{r}$.

$\vec{x}_a$ ist die Projektion von $\vec{x}$ auf die Drehachse; da wir $\vec{a}$ als Einheitsvektor vorausgesetzt haben, ist dies nach den allgemeinen Regeln der Vektorrechnung einfach

$$\vec{x}_a = (\vec{a}\cdot\vec{x})\,\vec{a}\,,$$

denn die Länge des Vektors wird bei der Projektion mit dem Cosinus des Winkels zur Achse multipliziert, und die Richtung des auf die Achse projezierten Vektors ist natürlich gleich der Richtung der Achse.

Damit läßt sich auch die radiale Komponente problemlos berechnen: Da beide Komponenten zusammen den Vektor $\vec{x}$ ergeben müssen, ist

$$\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}_a = \vec{x} - (\vec{a}\cdot\vec{x})\,\vec{a}\,.$$

Da $\vec{x}_a$ parallel zu $\vec{a}$ ist und das Vektorprodukt zweier paralleler Vektoren verschwindet, können wir auch schreiben

$$\vec{r}^{\,*} = \vec{a}\times\vec{r} = \vec{a}\times\bigl(\vec{x}-(\vec{x}\cdot\vec{a})\vec{a}\bigr) = \vec{a}\times\vec{x}\,.$$

Da die Axialkomponente eines Vektors bei Drehungen natürlich erhalten bleibt, wird speziell der Vektor $\vec{x} = \vec{x}_a + \vec{r}$ also abgebildet auf

$$\begin{aligned}&\vec{x}_a + \cos\varphi\;\vec{r} - \sin\varphi\;\vec{r}^{\,*}\\ =&(\vec{x}\cdot\vec{a})\vec{a} + \cos\varphi\;\bigl(\mathbf{x}-(\vec{x}\cdot\vec{a})\vec{a}\bigr) - \sin\varphi\;\vec{a}\times\vec{x}\\ =&(1-\cos\varphi)(\vec{x}\cdot\vec{a})\vec{a} + \cos\varphi\vec{x} + \sin\varphi\vec{a}\times\vec{x}\,.\end{aligned}$$

Um den Geschwindigkeitsvektor einer Drehung auszurechnen, müssen wir diese zunächst zu einem dynamischen Prozeß machen, d.h. anstelle einer Drehung mit konstantem Drehwinkel φ betrachten wir eine Drehung mit Winkelgeschwindigkeit ω. Wir gehen wieder aus von einem festen Punkt $\mathbf{x}$ und betrachten dessen Position zum Zeitpunkt t, d.h. wir betrachten die Funktion

$$\vec{f}\colon\begin{cases}\mathbb{R} & \to \mathbb{R}^3\\ t & \mapsto (1-\cos\omega t)(\vec{x}\cdot\vec{a})\;\vec{a} + \cos\omega t\;\vec{x} + \sin\omega t\;\vec{a}\times\vec{x}\,.\end{cases}$$

Der Geschwindigkeitsvektor im Punkt $\mathbf{x}$ ist die Ableitung dieser Funktion im Nullpunkt, also der Vektor

$$\frac{d\vec{f}}{dt}(0) = \bigl(\omega\sin\omega t\;(\vec{x}\cdot\vec{a})\vec{a} - \omega\sin\omega t\;\vec{x} + \omega\cos\omega t\;\vec{a}\times\vec{x}\bigr)_{|t=0} = \omega\vec{a}\times\vec{x}\,.$$

Mit anderen Worten: Bei der Drehung mit Winkelgeschwindigkeit ω um die von $\vec{a}$ aufgespannte Achse ist der Geschwindigkeitsvektor im Punkt $\mathbf{x}$ gleich $\omega\vec{a}\times\vec{x}$.

Der Vektor $\omega\vec{a}$ läßt sich auffassen als eine vektorielle Winkelgeschwindigkeit (die in der Physik in der Tat genau so definiert wird), und für einen beliebigen Vektor $\vec{\omega}\in\mathbb{R}^3$ ist das Vektorfeld

$$\vec{V}\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3;\quad \mathbf{x}\mapsto\vec{\omega}\times\vec{x}$$

das Feld der Geschwindigkeitsvektoren zu einer Rotation mit vektorieller Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$.

Nach dieser langen Zwischenüberlegung wird es Zeit, wieder zum eigentlichen Thema dieses Abschnitts zurückzukehren, dem antisymmetrischen Anteil A der JACOBI-Matrix eines Vektorfelds $\vec{V}$ im dreidimensionalen Raum. Mit

$$J_{\vec{V}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix}\frac{\partial V_1}{\partial x} & \frac{\partial V_1}{\partial y} & \frac{\partial V_1}{\partial z}\\ \frac{\partial V_2}{\partial x} & \frac{\partial V_2}{\partial y} & \frac{\partial V_2}{\partial z}\\ \frac{\partial V_3}{\partial x} & \frac{\partial V_3}{\partial y} & \frac{\partial V_3}{\partial z}\end{pmatrix}$$

ist

$$A = \frac{1}{2}\left(A - {}^tA\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & \frac{\partial V_1}{\partial y}-\frac{\partial V_2}{\partial x} & \frac{\partial V_1}{\partial z}-\frac{\partial V_3}{\partial x}\\ \frac{\partial V_2}{\partial x}-\frac{\partial V_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial V_2}{\partial z}-\frac{\partial V_3}{\partial y}\\ \frac{\partial V_3}{\partial x}-\frac{\partial V_1}{\partial z} & \frac{\partial V_3}{\partial y}-\frac{\partial V_2}{\partial z} & 0\end{pmatrix},$$

und wie wir zu Beginn dieses Abschnitt gesehen haben, ist für jeden Vektor $\vec{v}$

$$A\vec{v} = \vec{a}\times\vec{v}\quad\text{mit}\quad \vec{a} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{\partial V_3}{\partial y}-\frac{\partial V_2}{\partial z}\\ \frac{\partial V_1}{\partial z}-\frac{\partial V_3}{\partial x}\\ \frac{\partial V_2}{\partial x}-\frac{\partial V_1}{\partial y}\end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor $\vec{a}$ beschreibt, wie wir oben gesehen haben, das Geschwindigkeitsfeld einer Rotation. Da der Faktor $\frac{1}{2}$ in konkreten Rechnungen nur hinderlich wäre, bezeichnen wir aber nicht, wie dies eigentlich sinnvoll wäre, $\vec{a}$ selbst als *Rotation* des Vektorfelds $\vec{V}$, sondern den doppelten Vektor $2\vec{a}$, d.h. wir definieren

Definition: $\vec{V}: D \to \mathbb{R}^3$ sei ein Vektorfeld auf der offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Dann bezeichnen wir das Vektorfeld

$$\operatorname{rot} V: D \to \mathbb{R}^3; \quad \mathbf{x} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} \\ \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

als Rotation von $\vec{V}$.

Für ein Vektorfeld $\vec{V} \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^3)$, dessen JACOBI-Matrix symmetrischen Anteil S hat, ist also

$$\vec{V}(\mathbf{x} + \vec{h}) = \vec{V}(\mathbf{x}) + S\vec{h} + \tfrac{1}{2}(\operatorname{rot} \vec{V}) \times \vec{h} + o(|\vec{h}|) .$$

e) Erste Beispiele

Zum besseren Verständnis von Divergenz und Rotation wollen wir beide für zwei einfache Felder ausrechnen.

1) Das elektrische Feld einer Punktladung: Eine Punktladung der Stärke q im Nullpunkt erzeugt nach dem COULOMBschen Gesetz ein elektrisches Feld $\vec{E}$ der Stärke

$$\vec{E}(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} ,$$

denn die Feldstärke nimmt mit der Entfernung vom Nullpunkt quadratisch ab und hat die Richtung (oder – je nach Vorzeichen von q – auch Gegenrichtung) des Ortsvektors., d.h. der Einheitsvektor der Richtung ist $\vec{x}/|\vec{x}|$ und sorgt für die dritte Potenz im Nenner.

In Koordinaten ist also

$$\vec{E}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} E_1(\mathbf{x}) \\ E_2(\mathbf{x}) \\ E_3(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{x}|^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

Zur Berechnung der Divergenz müssen wir die erste Komponente nach x, die zweite nach y und die dritte nach z ableiten und dann die drei Ableitungen addieren. Beachten wir, daß

$$|\vec{x}|^3 = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$$

ist, folgt sofort aus der Quotientenregel, daß

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_1}{\partial x}(\mathbf{x}) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|\vec{x}|^3 - x \cdot \frac{3}{2} \cdot 2x|\vec{x}|}{|\vec{x}|^6} \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{x}|^3} - \frac{3x^2}{|\vec{x}|^5} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{x}|^5} (-2x^2 + y^2 + z^2) . \end{aligned}$$

Entsprechend ist

$$\frac{\partial E_2}{\partial y}(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{x}|^5} (x^2 - 2y^2 + z^2)$$

und

$$\frac{\partial E_3}{\partial z}(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{x}|^5} (x^2 + y^2 - 2z^2) ,$$

also

$$\operatorname{div} \vec{E}(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{x}|^5} (-2x^2 + y^2 + z^2 + x^2 - 2y^2 + z^2 + x^2 + y^2 - 2z^2) = 0 .$$

Zur Berechnung der Rotation benötigen wir die Einträge der JACOBI-Matrix, die nicht in der Diagonale stehen; dabei werden die Komponenten von $\vec{E}$ nach jenen Variablen abgeleitet, die *nicht* im Zähler stehen. Die Situation ist also stets dieselbe, und es genügt, wenn wir beispielsweise die Ableitung von E_1 nach y ausrechnen:

$$\frac{\partial E_1}{\partial y} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{3}{2} \right) \frac{x \cdot 2y}{|\vec{x}|^5} .$$

Entsprechend ist

$$\frac{\partial E_2}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{3}{2} \right) \frac{y \cdot 2x}{|\vec{x}|^5} ,$$

die x-Komponente von $\operatorname{rot} \vec{E}$ als Differenz dieser beiden Ableitungen verschwindet also, und genauso überzeugt man sich auch vom Verschwinden der anderen Komponenten.

Somit ist also das Feld einer Punktladung außerhalb des Punktes selbst sowohl quellen- als auch wirbelfrei, genau wie es nach den MAXWELLschen Gleichungen auch sein muß.

2) Das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters: Das Magnetfeld eines von einem Strom der Stärke I durchflossenen geradlinigen Drahts ist nach dem BIOT-SAVARTschen Gesetz

$$\vec{H}(\mathbf{x}) = \frac{I}{2\pi|\vec{r}|^2}\,\vec{a}\times\vec{x}\,,$$

wobei $\vec{a}$ der Einheitsvektor in Richtung des Stroms und $\vec{r}$ der Abstandsvektor zwischen dem Draht und dem Punkt $\vec{x}$ ist. $\vec{H}$ ist überall im $\mathbb{R}^3$ erklärt, außer auf der von $\vec{a}$ aufgespannten Geraden, wo $\vec{r}$ der Nullvektor ist.

Zum einfacherer Rechnen wählen wir das Koordinatensystem so, daß $\vec{a}$ der Einheitsvektor in Richtung der positiven z-Achse ist; für den Punkt mit Koordinaten (x, y, z) ist dann

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x\\ y\\ 0\end{pmatrix} \quad\text{und}\quad \vec{a}\times\vec{x} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y\\ x\\ 0\end{pmatrix}\,,$$

d.h.

$$\vec{H}(\mathbf{x}) = \frac{I}{4\pi(x^2+y^2)}\begin{pmatrix} -y\\ x\\ 0\end{pmatrix}\,.$$

Die drei Komponenten dieses Felds könnten wir nun wie oben nach den drei Variablen x, y, z ableiten, um so Rotation und Divergenz zu berechnen; es gibt allerdings auch eine andere Möglichkeit, die JACOBI-Matrix eines solchen Felds zu bestimmen: Wie auch das $\vec{E}$-Feld im obigen Beispiel läßt sich $\vec{H}$ schreiben als Produkt einer skalaren Funktion mit einer *linearen* Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Solche Funktionen, bei denen alle Nichtlinearität in einer skalaren Funktion steckt, bezeichnen wir als *quasilinear:*

Definition: Eine Funktion $\vec{f}\colon D \to \mathbb{R}^m$ auf einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *quasilinear,* wenn es eine Funktion $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ und eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ gibt, so daß

$$\vec{f}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})\cdot A\vec{x}$$

ist.

In diesem Sinne ist $\vec{H}(x)$ quasilinear mit

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{I}{4\pi(x^2+y^2)} \quad\text{und}\quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

und das obige Feld $\vec{E}$ ist quasilinear mit

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}|^3} \quad\text{und}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\,.$$

Lemma: Für eine quasilineare Funktion $\vec{f}\colon D \to \mathbb{R}^m$ auf einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist

$$J_{\vec{f}}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})\cdot A + (A\vec{x})\cdot {}^t\big(\operatorname{grad}\varphi(\mathbf{x})\big)\,.$$

In dieser Formel steht der erste Malpunkt für die Multiplikation eines Skalars mit einer Matrix, der zweite für die Matrixmultiplikation des *Spaltenvektors* $A\vec{x}$ mit dem zum *Zeilenvektor* transponierten Gradienten; das Produkt ist eine $n\times m$-Matrix. Ausgeschrieben wird die Formel zu

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \varphi(\mathbf{x})\cdot a_{ij} + \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}x_\nu\right)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\,.$$

Zum *Beweis* leiten wir

$$f_i(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}x_\nu$$

nach x_j ab; nach der Produktregel erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) &= \varphi(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}x_\nu\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(\mathbf{x})\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}x_\nu\\ &= \varphi(\mathbf{x})\cdot a_{ij} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(\mathbf{x})\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}x_\nu\,,\end{aligned}$$

wie behauptet. ∎

Dieses Lemma wenden wir gleich an auf das Feld $\vec{H}(\mathbf{x})$; hier ist

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\mathbf{x}) = \frac{-2x\cdot I}{4\pi(x^2+y^2)^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}(\mathbf{x}) = \frac{-2y\cdot I}{4\pi(x^2+y^2)^2}\,,$$

d.h.

$$\operatorname{grad}\varphi(\mathbf{x}) = \frac{-2I}{4\pi(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} x\\ y\\ 0\end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
J_{\vec{H}}(\mathbf{x}) &= \frac{I}{4\pi(x^2+y^2)}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\
&\quad + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\cdot\frac{-2I}{4\pi(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} x & y & 0\end{pmatrix}\\
&= \frac{I}{4\pi(x^2+y^2)^2}\left(\begin{pmatrix} 0 & -x^2-y^2 & 0\\ x^2+y^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right.\\
&\quad \left. + \begin{pmatrix} -y\\ x\\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2x & 2y & 0\end{pmatrix}\right)\\
&= \frac{I}{4\pi(x^2+y^2)^2}\left(\begin{pmatrix} 0 & -x^2-y^2 & 0\\ x^2+y^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right.\\
&\quad \left. + \begin{pmatrix} 2xy & 2y^2 & 0\\ -2x^2 & -2xy & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right)\\
&= \frac{I}{4\pi(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} 2xy & y^2-x^2 & 0\\ y^2-x^2 & -2xy & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Diese Matrix ist symmetrisch und hat Spur Null, d.h auch hier ist

$$\operatorname{div}\vec{H}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot}\vec{H}(\mathbf{x}) = \vec{0}\,,$$

und auch dies natürlich wieder in Übereinstimmung mit den MAXWELLschen Gleichungen.

f) Allgemeine Rechenregeln

Nachdem wir gerade mit relativ großem Aufwand für zwei Beispiele Divergenz und Rotation berechnet haben, wollen wir nun einige Rechenregeln herleiten, die uns zeigen werden, daß zumindest ein Teil der obigen Rechnungen hätte vermieden werden können.

Wir wollen uns zunächst überlegen, was passiert, wenn wir zwei der drei Operatoren grad, div und rot hintereinanderausführen – sofern dies möglich ist.

Der Gradient einer skalaren Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein Vektorfeld; es ist also möglich, dessen Divergenz und Rotation zu berechnen. Um keine Probleme mit der Existenz und der Reihenfolge von Ableitungen zu haben, setzen wir voraus, daß f in $\mathcal{C}^2(D,\mathbb{R})$ liegt; dann ist

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} f = \operatorname{div}\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}\\ \vdots\\ \frac{\partial f}{\partial x_n}\end{pmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\,.$$

Die rechte Seite schreiben wir auch kurz als

$$\Delta f \underset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

und bezeichnen

$$\Delta \underset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

als LAPLACE-Operator.

(Der LAPLACE-Operator ist älter als Divergenz, Gradient, Rotation und so weiter; er spielt eine große Rolle sowohl bei Wellen als auch bei Potentialfeldern. HAMILTON wählte das Zeichen ∇ in Anlehnung an diesen Operator; formal kann man $\Delta = \nabla\cdot\nabla$ schreiben, allerdings muß man mit solchen „Skalarprodukten“ von Operatoren sehr vorsichtig sein und kann nicht erwarten, daß sie all den üblichen Regeln genügen.)

Auch die Rotation eines Gradientenfelds läßt sich leicht berechnen, allerdings natürlich nur im $\mathbb{R}^3$, da wir für andere Dimensionen keine Rotation definiert haben.

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = \operatorname{rot}\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\end{pmatrix} = \vec{0}\,.$$

Die Rotation eines stetig differenzierbaren Gradientenfelds ist also stets Null; da das elektrische Feld der negative Gradient des elektrischen Potentials ist, hätten wir oben also für

$$\vec{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} = -\operatorname{grad}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\vec{x}|}$$

auf die Berechnung der Rotation verzichten können.

Die Divergenz eines Vektorfelds ist eine skalare Funktion; der einzige Operator, der darauf angewandt werden kann, ist daher der Gradient:

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{V} = \operatorname{grad}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = \begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 V_i}{\partial x_1\partial x_i}\\ \vdots\\ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 V_i}{\partial x_n\partial x_i}\end{pmatrix}.$$

Die Rotation eines Vektorfelds im Dreidimensionalen schließlich ist wieder ein Vektorfeld, wir können also Divergenz und Rotation davon berechnen:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{V} &= \operatorname{div}\begin{pmatrix}\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}\\ \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}\\ \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\end{pmatrix}\\ &= \frac{\partial^2 V_3}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 V_2}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 V_3}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 V_1}{\partial z\partial y} = 0\end{aligned}$$

für ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld. Da ein Magnetfeld als Rotation eines Vektorpotentials geschrieben werden kann, erklärt dies, warum im obigen Beispiel $\operatorname{div}\vec{H} = 0$ war.

Bleibt noch die Rotation der Rotation:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{V} &= \operatorname{rot}\begin{pmatrix}\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}\\ \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}\\ \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{\partial^2 V_2}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_3}{\partial z\partial x}\\ \frac{\partial^2 V_3}{\partial z\partial y} - \frac{\partial^2 V_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 V_1}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2 V_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial y\partial z}\end{pmatrix}\\ &= \operatorname{grad}\operatorname{div} f + \begin{pmatrix}\Delta\vec{V}_1\\ \Delta\vec{V}_2\\ \Delta\vec{V}_3\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Als letztes wollen wir noch zwei „Produktregeln“ beweisen, die für quasilinearer Funktionen unmittelbare Folgerungen des oben bewiesenen Lemmas sind, für allgemeinere Funktionen aber neu.

Wir gehen aus von einer Funktion $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ und einem Vektorfeld $\vec{V}\colon D \to \mathbb{R}^n$ für eine offene Teilmenge D des $\mathbb{R}^n$; sowohl f als aauch $\vec{V}$ seien stetig differenzierbar. Dann ist

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(f\vec{V}) &= \frac{\partial(fV_1)}{\partial x} + \frac{\partial(fV_2)}{\partial y} + \frac{\partial(fV_3)}{\partial z}\\ &= f\cdot\left(\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}V_1 + \frac{\partial f}{\partial y}V_2 + \frac{\partial f}{\partial z}V_3\right)\\ &= f\operatorname{div}\vec{V} + (\operatorname{grad} f)\cdot\vec{V}\end{aligned}$$

und genauso im Falle $n = 3$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(f\vec{V}) &= \begin{pmatrix}\frac{\partial(fV_3)}{\partial y} - \frac{\partial(fV_2)}{\partial z}\\ \frac{\partial(fV_1)}{\partial z} - \frac{\partial(fV_3)}{\partial x}\\ \frac{\partial(fV_2)}{\partial x} - \frac{\partial(fV_1)}{\partial y}\end{pmatrix}\\ &= f\begin{pmatrix}\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}\\ \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}\\ \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial y}V_3 - \frac{\partial f}{\partial z}V_2\\ \frac{\partial f}{\partial z}V_1 - \frac{\partial f}{\partial x}V_3\\ \frac{\partial f}{\partial x}V_2 - \frac{\partial f}{\partial y}V_1\end{pmatrix}\\ &= f\operatorname{rot}\vec{V} + (\operatorname{grad} f)\times\vec{V}\,.\end{aligned}$$

Für die lineare Funktion

$$\vec{V}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n; \quad \mathbf{x} \mapsto A\vec{x} \quad \text{mit} \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

ist

$$\operatorname{div} \vec{V} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \operatorname{Spur} A$$

und, im Falle $n = 3$,

$$\operatorname{rot} \vec{V} = \begin{pmatrix} a_{32} - a_{23} \\ a_{13} - a_{31} \\ a_{21} - a_{12} \end{pmatrix} ;$$

für eine quasilineare Funktion $\vec{f}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})A\vec{x}$ ist also

$$\operatorname{div} \vec{f} = \varphi \operatorname{Spur} A + (\operatorname{grad} \varphi) \cdot A\vec{x}$$

und

$$\operatorname{rot} \vec{f} = \varphi \cdot \begin{pmatrix} a_{32} - a_{23} \\ a_{13} - a_{31} \\ a_{21} - a_{12} \end{pmatrix} + (\operatorname{grad} \varphi) \times A\vec{x} ,$$

was uns in obigen Beispielen manche Rechnung erspart hätte.

g) Polarkoordinaten, Kugelkoordinaten und Zylinderkoordinaten

Auch in diesem letzten Abschnitt von §4 soll es um Möglichkeiten gehen, wie wir bei diesen (und anderen) Beispielen effizienter rechnen können. Das Feld einer Punktladung beispielsweise ist kugelsymmetrisch, jedoch haben wir bei der Berechnung von Divergenz und Rotation dieses Feldes die Kugelsymmetrie mutwillig zerstört, indem wir in einem kartesischen Koordinatensystem rechneten. Hier soll es nun um Koordinatensysteme gehen, die einer solchen Symmetrie angepaßt sind.

1) Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$: Wir kennen bereits aus dem letzten Semester (**[HM1]**, *Kapitel 1, §4b)*) die Polarkoordinatendarstellung einer komplexen Zahl; genauso definieren wir für jeden Punkt $(x, y) \neq (0, 0)$ aus $\mathbb{R}^2$ die beiden Polarkoordinaten $r > 0, \varphi$ durch die Bedingung

$$x = r \cos \varphi \quad \text{und} \quad y = r \sin \varphi .$$

φ ist dabei, wie üblich, nur modulo 2π bestimmt.

Für eine Funktion $f(x, y)$ auf einer Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ können wir die Polarkoordinatendarstellung

$$F(r, \varphi) \underset{\text{def}}{=} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

betrachten; wir wollen sehen, wie man mit F allein immer noch den Gradienten oder beispielsweise auch die LAPLACEsche Δf berechnen kann.

Dazu müssen wir zunächst die partiellen Ableitungen von f nach x und y durch die von F nach r und φ ausdrücken. Dies ist auf direkte Weise etwas schwierig, da wir keine gute Formel für die Berechnung von φ aus x und y haben; die umgekehrte Aufgabe dagegen ist umso einfacher: Nach der Kettenregel ist

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \varphi$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = -\frac{\partial f}{\partial x} r \sin \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} r \cos \varphi .$$

Da $r > 0$ ist, können wir dies auch in der Form

$$\begin{aligned} F_r &= f_x \cos \varphi + f_y \sin \varphi \\ \frac{F_\varphi}{r} &= -f_x \sin \varphi + f_y \cos \varphi \end{aligned}$$

schreiben. Dies ist ein lineares Gleichungssystem für f_x und f_y; wenn wir von der mit $\cos \varphi$ multiplizierten ersten Gleichung die mit $\sin \varphi$ multiplizierte zweite subtrahieren, erhalten wir

$$f_x = F_r \cos \varphi - \frac{F_\varphi}{r} \sin \varphi ;$$

entsprechend erhalten wir

$$f_y = F_r \sin \varphi + \frac{F_\varphi}{r} \cos \varphi ,$$

wenn wir die mit $\sin \varphi$ multiplizierte erste Gleichung zur mit $\cos \varphi$ multiplizierten zweiten addieren.

Entsprechend können wir auch die zweiten partiellen Ableitungen von f durch partielle Ableitungen von F ausdrücken, allerdings werden hier die Ausdrücke schon deutlich komplexer, so daß hier auf die detailierte Rechnung verzichtet sei. Wichtig ist vor allem der LAPLACE-Operator; deshalb sei zumindest für den das Ergebnis angegeben: Hier heben sich eine ganze Reihe von Termen weg, und

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = F_{rr} + \frac{F_r}{r} + \frac{F_{\varphi\varphi}}{r^2}\,,$$

eine Formel, die man im nachhinein nun natürlich leicht und relativ schnell beweisen kann, indem man

$$F_{rr} = \big(f_{xx}\cos\varphi + f_{xy}\sin\varphi\big)\cos\varphi + \big(f_{xy}\cos\varphi + f_{yy}\sin\varphi\big)\sin\varphi$$

und

$$\begin{aligned} F_{\varphi\varphi} &= \big(f_{xx} r\sin\varphi - f_{xy} r\cos\varphi\big) r\sin\varphi - f_x r\cos\varphi \\ &\quad - \big(f_{xy} r\sin\varphi - f_{yy} r\cos\varphi\big) r\cos\varphi - f_y r\sin\varphi \end{aligned}$$

nach der Kettenregel berechnet und dann einsetzt.

2) Zylinderkoordinaten im $\mathbb{R}^3$: Für den $\mathbb{R}^3$ gibt es zwei naheliegende Verallgemeinerung der Polarkoordinaten: Einmal können wir in der (x, y)-Ebene Polarkoordinaten einführen, die z-Koordinate aber unverändert lassen, zum anderen können wir neben dem Abstand vom Nullpunkt zwei Winkelkoordinaten einführen, wie z.B. die geographische Länge und Breite. Hier soll es zunächst um den ersten Fall gehen, wir haben also drei Koordinaten (r, φ, z) mit $r > 0$, die über die Gleichungen

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi \quad\text{und}\quad z = z$$

mit den kartesischen Koordinaten verbunden sind. Diese Koordinaten heißen *Zylinderkoordinaten,* da die Flächen r = *konstant* Zylinder sind. Insbesondere sit die Koordinate r hier nicht mehr gleich dem Abstand eines Punktes vom Nullpunkt, sondern gleich dem Abstand von der z-Achse.

Da die z-Koordinate des kartesischen Koordinatensystems übernommen wird, brauchen wir für diese Koordinaten nicht neu zu rechnen, sondern können die obigen Ergebnisse praktisch wörtlich übernehmen: Mit

$$F(r, \varphi, z) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$$

ist

$$\begin{aligned} f_x &= F_r\cos\varphi - \frac{F_\varphi}{r}\sin\varphi \\ f_y &= F_r\sin\varphi + \frac{F_\varphi}{r}\cos\varphi \\ f_z &= F_z \end{aligned}$$

und

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = F_{rr} + \frac{F_r}{r} + \frac{F_{\varphi\varphi}}{r^2} + F_{zz}\,.$$

3) Kugelkoordinaten: Hier führen wir zusätzlich zu den beiden Polarkoordinaten der Ebenen als dritte Koordinate noch eine *Winkelkoordinate* ϑ ein, wir haben also drei Koordinaten (r, φ, ϑ), wobei r wieder positiv sein muß und den Abstand vom Nullpunkt bezeichnet.

Im Gegensatz zur Konvention der Geographen, wonach der Äquator, d.h. der Schnittkreis einer Kugel um den Nullpunkt mit der (x, y)-Ebenen, die Breite Null hat, ist es in der Mathematik, Physik und Technik üblich, dem Äquator die Koordinate $\vartheta = \pi/2$ zu geben, dem „Nordpol“, d.h. dem Schnittpunkt mit der positiven z-Achse, $\vartheta = 0$ und dem Südpol $\vartheta = \pi$. In der (x, z)-Ebene ist also

$$x = r\sin\vartheta \quad\text{und}\quad z = r\cos\vartheta\,,$$

in der (y, z)-Ebene

$$y = r\sin\vartheta \quad\text{und}\quad z = r\cos\vartheta\,,$$

und ganz allgemein ist

$$R = r\sin\vartheta \quad\text{und}\quad z = r\cos\vartheta\,,$$

wobei R den Abstand eines Punktes von der z-Achse bezeichnet.

Für einen Punkt im Abstand R von der z-Achse ist

$$x = R\cos\varphi \quad\text{und}\quad y = R\sin\varphi\,,$$

zusammen mit den obigen Formeln erhalten wir also als Zusammenhang zwischen Kugelkoordinaten und kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\sin\vartheta \\ y &= r\sin\varphi\sin\vartheta \\ z &= r\cos\vartheta\,. \end{aligned}$$

Wieder können wir einer Funktion $f(x,y,z)$ in kartesischen Koordinaten durch

$$F(r,\varphi,\vartheta) \underset{\text{def}}{=} f(r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)$$

eine neue Funktion zuordnen und durch Anwendung der Kettenregel sowie Lösen eines linearen Gleichungssystems die partiellen Ableitungen zueinander in Beziehung setzen; eine grausame, wenn auch nicht sonderlich schwierige Rechnung ergibt, daß beispielsweise

$$\begin{aligned}\Delta f &= f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}\\ &= F_{rr} + \frac{2F_r}{r} + \frac{F_{\varphi\varphi}}{r^2\sin^2\vartheta} + \frac{F_{\vartheta\vartheta}}{r^2} + \frac{F_\vartheta}{r^2\tan\vartheta}\end{aligned}$$

ist.

Als Beispiel wollen wir damit noch einmal die Divergenz des elektrischen Felds einer Ladung q im Nullpunkt berechnen: Diese erzeugt ein Potential

$$U(r,\varphi,\vartheta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\,,$$

das Feld ist $\vec{E} = -\operatorname{grad} U$ und

$$\operatorname{div}\vec{E} = -\operatorname{div}\operatorname{grad} U = -\Delta U = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{r^3} + \frac{2}{r}\cdot\frac{-1}{r^2}\right) = 0\,.$$

§5: Kurvenintegrale im $\mathbb{R}^n$

In den bisherigen vier Paragraphen dieses Kapitels beschäftigten wir uns mit der *Differential*rechnung im $\mathbb{R}^n$; es wird langsam Zeit, uns auch der *Integral*rechnung zuzuwenden. In diesem Paragraphen werden die Mengen, über die integriert wird, noch eindimensional sein, d.h. also Kurven. Entsprechende Integrale benötigt man einerseits, Bogenlängen von Kurven zu bereichen, vor allem aber sind sie wichtig, um die aufzuwendende oder freiwerdende Energie bei der Bewegung eines Objekts in einem Kraftfeld (oder einem elektrisch geladenen Teilchens in einem elektrischen Feld *usw.*) zu berechnen. Wir beginnen mit einer genaueren Klärung der Begriffe

a) Kurvenstücke und Kurven

Wir hatten schon in früheren Paragraphen Kurven als stetige oder manchmal auch differenzierbare Abbildungen eines Intervalls in den $\mathbb{R}^n$ eingeführt. Hier bei der Integrationstheorie wird die Differenzierbarkeit von entscheidender Bedeutung sein; wir definieren daher für das folgende

Definition: *a)* Ein *Kurvenstück* γ ist eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$$

eines Intervalls in den $\mathbb{R}^n$.
b) Eine *Kurve* γ ist eine endliche Folge von Kurvenstücken

$$\gamma_1,\dots,\gamma_r\colon [a_i,b_i] \to \mathbb{R}^n$$

von Kurvenstücken mit der Eigenschaft, daß

$$\gamma_i(b_i) = \gamma_{i+1}(a_{i+1}) \quad \text{für } i = 1,\dots,n-1.$$

c) Eine Kurve γ heißt geschlossen, wenn $\gamma_r(b_r) = \gamma_1(a_1)$ ist.

Anschaulich sollte man sich ein Kurvenstück durch sein Bild im $\mathbb{R}^n$ vorstellen, allerdings muß man beachten, daß dasselbe Bild durch ganz verschiedene Funktionen parametrisiert werden kann. Wir wollen natürlich Begriffe wie Bogenlänge so definieren, daß sie nicht von dieser Parametrisierung abhängen, es wird aber in jedem Fall nachzuweisen sein, daß dies auch tatsächlich der Fall ist. Als Beispiel für verschiedene Parametrisierungen einer und derselben Kurve betrachten wir den Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$. Seine bekannteste Darstellung als Kurvenstück ist die Parametrisierung

$$\gamma_1\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto (\cos t, \sin t)\,,$$

aber natürlich wäre auch

$$\gamma_2\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

eine Möglichkeit. Es geht aber auch ganz anders, denn auch

$$\gamma_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}, \frac{2t}{t^2+1}\right)$$

hat als Bild den Einheitskreis, und zumindest für jedes endliche Teilintervall von $\mathbb{R}$ definiert auch γ_3 ein Kurvenstück.

Die Bedingung im Teil *b)* der obigen Definition stellt sicher, daß Kurven, anschaulich betrachtet, zusammenhängend sind; es hat allein praktische Gründe, daß man nicht auch von den Intervallen verlangt, daß sie unmittelbar aneinander anschließen: Oft werden die Formeln für ein Kurvenstück einfacher, wenn man einen bestimmten Anfangswert wie etwa Null für das Intervall nehmen kann.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen einer Kurve und einem Kurvenstück liegt in der Differenzierbarkeit: Durch Verschiebung der Parameterintervalle könnte man jede Kurve durch eine stetige Abbildung $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ beschreiben, aber dort, wo zwei Kurvenstücke aneinanderstoßen, muß diese Abbildung nicht differenzierbar sein; anschaulich gesprochen kann die Kurve dort einen „Knick" haben.

Die Ableitung nach einem Parameter t wird meist nicht durch einen Strich, sondern durch einen Punkt bezeichnet; wir schreiben die Ableitung eines Kurvenstücks $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ daher als $\dot\gamma(t)$ und fassen sie als (Tangenten-)Vektor im $\mathbb{R}^n$ auf.

Gelegentlich wird es wichtig sein, daß dieser Vektor ungleich dem Nullvektor ist; wir definieren daher

Definition: *a)* Ein Kurvenstück $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt *regulär,* wenn $\dot\gamma(t) \neq 0$ für alle $t \in (a,b)$.
b) Eine Kurve γ heißt *stückweise regulär,* wenn sie aus regulären Kurvenstücken zusammengesetzt werden kann.

Man beachte, daß für die Intervallendpunkte nichts gefordert wird: Selbst wenn die Ableitung dort existiert, muß sie nicht von Null verschieden kann. Auf diese Weise läßt sich ein Kurvenstück, bei dem $\dot\gamma(t)$ an endlich vielen Stellen gleich dem Nullvektor ist, immer noch als stückweise reguläre Kurve auffassen.

b) Die Bogenlänge einer Kurve

In **[HM1]**, *Kapitel I,* §1 hatten wir die Fläche unterhalb einer Kurve dadurch definiert, daß wir sie durch Rechtecke angenähert hatten; falls

deren Gesamtfläche bei immer feiner werdenden Unterteilungen gegen einen festen Grenzwert konvergierte, bezeichneten wir diesen als Fläche unterhalb der Kurve oder auch als RIEMANN-Integral über die die Kurve beschreibende Funktion.

Nichts spricht dagegen, bei der Definition der Bogenlänge genauso vorzugehen: Die primitiven Bausteine, mit denen wir die Kurve annähern, sind nun natürlich keine Rechtecke mehr, sondern Strecken; am einfachsten nehmen wir dazu Tangentenvektoren. Dazu brauchen wir allerdings Differenzierbarkeit, wir müssen uns also zunächst auf ein Kurven*stück* beschränken.

Sei also $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein Kurvenstück; wir unterteilen das Intervall, wie wir es vom RIEMANN-Integral her gewohnt sind, durch Zwischenpunkte

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = b$$

und wählen in jedem Teilintervall (t_i, t_{i+1}) einen Zwischenpunkt τ_i. Der Tangentenvektor im Punkt τ_i ist $\dot\gamma(\tau_i)$, die Bogenlänge der Kurve kann also angenähert werden durch

$$\sum_{i=0}^{N-1} \left|\dot\gamma(\tau_i)\right| .$$

Da γ nach Definition eines Kurvenstücks stetig differenzierbar ist, ist auch $\left|\dot\gamma(t)\right|$ immerhin noch eine stetige und damit insbesondere RIEMANN-integrierbare Funktion; wir wissen also, daß der Grenzwert für immer enger werdende Verfeinerungen der Unterteilung existiert und gleich dem Integral über diese Funktion ist. Somit kamen wir auf ganz natürliche Weise auf die

Definition: *a)* Die Bogenlänge eines Kurvenstücks $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist

$$\int_a^b \left|\dot\gamma(t)\right| dt .$$

b) Die Bogenlänge einer Kurve γ, bestehend aus den Kurvenstücken $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ ist die Summe der Bogenlängen der Kurvenstücke γ_i.

Um zu sehen, ob das alles wirklich vernünftig ist, berechnen wir die Bogenlänge der Kreislinie

$$\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto (\cos t, \sin t)\,.$$

(Wir wissen bereits, daß diese gleich 2π sein muß, denn genau über diese Eigenschaft hatten wir in **[HM1]**, *Kapitel I, §4b)* die Zahl π definiert.)

Hier ist

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \left|\dot\gamma(t)\right| = \sin^2 t + \cos^2 t = 1\,,$$

und damit ist die Bogenlänge

$$\int_0^{2\pi} \left|\dot\gamma(t)\right| dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi\,,$$

wie erwartet; zumindest für diese Parametrisierung ist also alles vernünftig.

Alternativ können wir die Kreislinie auch parametrisieren durch

$$\gamma_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto \left(\frac{t^2-1}{t^2+1},\ \frac{2t}{t^2+1}\right);$$

hier ist die Bogenlänge im Sinne obiger Definition nicht erklärt, allerdings können wir natürlich γ_2 auf endliche Intervalle einschränken und diese immer größer werden lassen; falls ein Grenzwert existiert, bekommen wir also auch hier eine Bogenlänge als uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\dot\gamma(t)\right| dt\,.$$

Berechnen wir zunächst die Ableitung von γ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right) = \frac{(t^2+1)\cdot 2t - (t^2-1)\cdot 2t}{(t^2+1)^2} = \frac{4t}{(t^2+1)^2}$$

und

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{2t}{t^2+1}\right) = \frac{(t^2+1)\cdot 2 - 2t\cdot 2t}{(t^2+1)^2} = \frac{-2(t^2-1)}{(t^2+1)^2}\,,$$

d.h.

$$\left|\dot\gamma(t)\right| = \frac{\sqrt{(4t)^2 + 4(t^2-1)^2}}{(t^2+1)^2} = \frac{4}{(t^2+1)^2}\,.$$

Die Bogenlänge ist somit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\,dt}{(t^2+1)^1} = \left(\frac{2t}{t^2+1} + 2\arctan t\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2}\right) = 2\pi\,,$$

auch bei dieser Parametrisierung erhalten wir also dasselbe Ergebnis, wie dies aus geometrischen Gründen natürlich auch sein muß: Die Bogenlänge ist schließlich eine Eigenschaft einer Kurve, nicht einer speziellen Parametrisierung der Kurve.

Ganz so einfach ist die Sache allerdings nun doch nicht: Schließlich parametrisiert auch

$$\gamma_3\colon [0,20\pi] \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

die Kreislinie, aber nun ist die Bogenlänge

$$\int_0^{20\pi} \left|\dot\gamma_3(t)\right| dt = \int_0^{20\pi} dt = 20\pi\,,$$

und auch das erscheint geometrisch durchaus sinnvoll: Wenn man nicht nur einmal, sondern zehnmal im Kreise herum geht, legt man schließlich einen zehnmal so langen Weg zurück.

Wir müssen also etwas sorgfältig sein, wenn wir präzisieren wollen, was die Unabhängigkeit der Bogenlänge von der Parametrisierung wirklich bedeuten soll; da das ganze dadurch auch etwas umfangreicher wird, sei das entsprechende Lemma in den nächsten Abschnitt verschoben, wo wir es gleich etwas allgemeiner beweisen werden.

c) Integration eines Vektorfelds längs einer Kurve

Die Hauptanwendung von Kurvenintegralen besteht nicht darin, die Längen aller möglicher Kurven zu berechnen; der Hauptgrund, warum solche Integrale eingeführt wurden, ist die Berechnung der aufzuwendenden oder freiwerdenden Energie bei der Bewegung eines Teilchens in einem Kraftfeld *bzw.* – im Fall eines elektrisch geladenen Teilchens – eines elektromagnetischen Felds.

Gehen wir der Einfachheit halber aus von einem Kraftfeld $\vec{F}(\mathbf{x})$ und einem Teilchen, das sich entlang eines Kurvenstücks $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ durch dieses Feld bewegt, d.h. der Vektor $\vec{F}\big(\gamma(t)\big)$ sei für alle t aus $[a,b]$ definiert. Im Punkt $\gamma(t)$ greift dann also der Kraftvektor $\vec{F}\big(\gamma(t)\big)$ an; die Arbeit, die das Teilchen verrichten muß oder gewinnt, ist das Skalarprodukt aus Kraftvektor und (Tangential-)Vektor des Wegs.

Um die Gesamtarbeit zunächst näherungsweise auszurechen, unterteilen wir wie gewohnt das Intervall $[a,b]$ durch Zwischenpunkte

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = b$$

und wählen in jedem Teilintervall (t_i, t_{i+1}) einen Punkt τ_i. Der Tangentenvektor im Punkt τ_i ist $\dot\gamma(\tau_i)$, die Arbeit kann also angenähert werden durch

$$\sum_{i=0}^{N-1} \vec{F}\big(\gamma(\tau_i)\big) \cdot \dot\gamma(\tau_i)$$

Da γ nach Definition eines Kurvenstücks stetig differenzierbar ist, ist $\vec{F}\big(\gamma(t)\big) \cdot \dot\gamma(t)$ für ein stetiges Vektorfeld eine stetige und damit insbesondere RIEMANN-integrierbare Funktion; wir wissen also, daß der Grenzwert für immer enger werdende Verfeinerungen der Unterteilung existiert und gleich dem Integral über diese Funktion ist.

Definition: *a)* $\vec{V} \in \mathcal{C}^0(D, \mathbb{R}^n)$ sei ein stetiges Vektorfeld auf der offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$, und $\gamma\colon [a,b] \to D$ sei ein Kurvenstück. Das Integral über $\vec{V}$ entlang γ ist

$$\int_\gamma \vec{V}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \underset{\text{def}}{=} \int_a^b \vec{F}\big(\gamma(t)\big) \cdot \dot\gamma(t)\, dt\,.$$

b) Das Integral über $\vec{V}$ entlang einer Kurve γ ist die Summe der Integrale über $\vec{V}$ entlang der Kurvenstücke, aus denen γ zusammengesetzt ist.

Noch allgemeiner können wir ausgehen von einer beliebigen stetigen Funktion $f\colon C \to \mathbb{R}$ auf dem Bild $C = \gamma\big([a,b]\big)$ des Kurvenstücks

$\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und diese entlang γ integrieren. Als Motivation könnte man sich etwa vorstellen, daß γ eine materielle Kurve ist und $f\big(\gamma(t)\big)$ die (lineare) Massendichte im Punkt $\gamma(t)$ angibt, oder γ könnte den Weg eines Teilchens durch eine Flüssigkeit mit räumlich variabler Viskosität beschreiben *usw.*

Wenn wir wieder von derselben Unterteilung wie oben ausgehen und das Kurvenstück durch eine Folge von Tangentenvektoren approximieren, müssen wir hier die Summen

$$\sum_{i=0}^{N-1} f\big(\gamma(\tau_i)\big)\, \big|\dot\gamma(\tau_i)\big|$$

betrachten, und diese konvergieren wegen der Stetigkeit von f gegen

$$\int_\gamma f(\mathbf{x})\, ds \underset{\text{def}}{=} \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\, \big|\dot\gamma(t)\big|\, dt\,.$$

Analog definieren wir auch das Integral über eine *Kurve* γ.

Definition: $\int_\gamma f(\mathbf{x})\, ds$ heißt RIEMANN-STIELTJES-Integral über f entlang γ.

(Der niederländische Mathematiker THOMAS JAN STIELTJES (1856–1894) verallgemeinerte das RIEMANN-Integral zu den hier betrachteten Kurvenintegralen; ds steht hier für das Bogenelement der Kurve, wobei der Buchstabe s wohl vom lateinischen *spatium* = Entfernung kommen dürfte.)

Dieses RIEMANN-STIELTJES-Integral wird im Spezialfall $f \equiv 1$ zur Bogenlänge und für ein reguläres Kurvenstück γ ohne Selbstschnitte wird es für

$$f\big(\gamma(t)\big) = \frac{\vec{V}\big(\gamma(t)\big) \cdot \dot\gamma(t)}{\big|\dot\gamma(t)\big|}$$

zum Integral entlang γ über das Vektorfeld $\vec{V}$. (Falls sich die Kurve γ selbst schneidet, wie etwa eine 8, ist $\dot\gamma(t)$ im Schnittpunkt eventuell nicht nur vom Punkt $\gamma(t)$ abhängig, sondern vom Parameter t, so daß wir dann nicht in der Situation von RIEMANN-STIELTJES sind. Meist ist dies jedoch kein Problem, denn wenn so etwas nur endlich oft vorkommt, können wir die Kurve γ in endlich viele Kurvenstücke zerlegen, deren jedes die Voraussetzung erfüllt.)

Natürlich gelten auch für RIEMANN-STIELTJES-Integrale die aus **[HM1]**, *Kapitel 1, §3* bekannten Rechenregeln: Da wir Kurvenintegrale als spezielle RIEMANN-Integrale definiert haben, sind dies in der Tat einfach Spezialfälle der dort definierten Regeln. Wir haben also, zum Beispiel, wieder die *Monotonieregel*

$$\int_\gamma f(\mathbf{x})\,ds \le \int_\gamma g(\mathbf{x})\,ds \quad \text{falls } f(\mathbf{x}) \le g(\mathbf{x}) \text{ für jeden Punkt auf } \gamma,$$

die *Linearität*seigenschaft

$$\int_\gamma (\alpha f + \beta g)\,ds = \alpha \int_\gamma f\,ds + \beta \int_\gamma g\,ds$$

und für *Zusammensetzungen* gilt

$$\int_{\gamma+\delta} f\,ds = \int_\gamma f\,ds + \int_\delta f\,ds\,,$$

wobei $\gamma+\delta$ jene Kurve bezeichne, deren erste Kurvenstücke die Kurve γ definieren, während die restlichen die Bestandteile von δ sind.

Schließlich haben wir auch noch einen

Mittelwertsatz: Für jedes Kurvenstück $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und jede stetige Funktion f auf $\gamma([a,b])$ gibt es einen Parameterwert $\tau \in [a,b]$, so daß gilt

$$\int_\gamma f\,ds = f(\tau)\cdot \textit{Bogenlänge von } \gamma\,.$$

Beweis: Dies ist einfach der gewöhnliche Mittelwertsatz der Integralrechnung aus **[HM1]**, *Kapitel 1, §3,* angewandt auf die Funktion

$$t \mapsto f\big(\gamma(t)\big)\cdot\dot\gamma(t)\,.$$

■

Man beachte, daß dieser Satz für beliebige Funktionen im allgemeinen falsch ist: Da der Mittelwertsatz der Integralrechnung nur für stetige Funktionen gilt, können wir ihn nur anwenden, wenn $f\big(\gamma(t)\big)$ stetig ist. Ein einfaches Gegenbeispiel zum Mittelwertsatz wäre eine Kurve aus zwei gleichlangen Komponenten, auf deren einer f konstant gleich eins ist, während es auf der anderen verschwindet. Nach dem Mittelwertsatz, angewandt auf die beiden Komponenten, folgt, daß der Mittelwert über die gesamte Kurve gleich ein halb ist, aber dieser Wert wird von f nirgends angenommen.

Als nächstes kommen wir zu der angekündigten Unabhängigkeit des Kurvenintegrals von der Parametrisierung der Kurve. Da diese, wie wir am Beispiel der mehrfach durchlaufenenen Kreislinie gesehen haben, nicht ganz uneingeschränkt gilt, müssen wir zunächst definieren, was wir meinen:

Definition: Zwei Kurvenstücke $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\delta\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$ heißen äquivalent, wenn es eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi\colon [a,b] \to [c,d]$ gibt derart, daß $\delta\circ\varphi = \gamma$ ist, d.h. für alle $x \in [a,b]$ ist $\delta\big(\varphi(x)\big) = \gamma(x)$.

Dese Definition stellt insbesondere sicher, daß $\gamma\big([a,b]\big)$ und $\delta\big([c,d]\big)$ dieselbe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ sind, so daß die beiden Kurven als Punktmengen übereinstimmen; durch die geforderte Bijektivität von φ ist aber auch sichergestellt, daß die Kurve bei beiden Parametrisierungen gleich oft durchlaufen wird. Daher erwarten wir

Lemma: $\gamma\colon [a,b] \to D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\delta\colon [c,d] \to D \subseteq \mathbb{R}^n$ seien äquivalente Kurvenstücke, und $f\colon D \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion. Dann ist

$$\int_\gamma f(\mathbf{x})\,ds = \int_\delta f(\mathbf{x})\,ds\,.$$

Der *Beweis* ist eine einfache Anwendung der Kettenregel: Nach Definition der Äquivalenz gibt es eine stetig differenzierbare Funktion φ, so daß $\gamma = \delta \circ \varphi$ und damit $\gamma' = (\delta' \circ \varphi) \cdot \varphi'$ ist. Also ist nach der Substitutionsregel

$$\int_\gamma f(\mathbf{x})\,ds = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,dt = \int_a^b f\Big(\delta\big(\varphi(t)\big)\Big)\delta'\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt$$

$$= \int_c^d f\big(\delta(t)\big)\delta'(t)\,dt = \int_\delta f(\mathbf{x})\,ds\,.$$

■

d) Zirkulationsfreie und konservative Vektorfelder

Wir haben Kurvenintegrale über Vektorfelder eingeführt, um die Energie zu beschreiben, die zur Bewegung eines Teilchens durch ein Kraftfeld (oder ein elektromagnetisches Feld) aufgewendet werden muß oder dabei frei wird. Das gerade bewiesene Lemma zeigt, daß diese (Gesamt-)Energie nur vom Weg des Teilchens abhängt, nicht aber beispielsweise von seiner Geschwindigkeit. Wie aus der Physik bekannt ist, hängt aber beispielsweise bei reibungsfreier Bewegung eines Teilchens in einem mechanischen Kraftfeld der Weg nicht einmal von der Kurve ab, sondern nur von deren Anfangs- und Endpunkt; insbesondere verschwindet also das Integral längs einer jeden geschlossenen Kurve. In diesem Abschnitt wollen wir Vektorfelder mit dieser Eigenschaft genauer untersuchen.

Definition: Ein Vektorfeld $\vec{V}\colon D \to \mathbb{R}^n$ heißt *zirkulationsfrei,* wenn für jede geschlossene Kurve γ in D gilt:

$$\int_\gamma \vec{V}\,ds = 0\,.$$

Beginnen wir mit einem ganz einfachen Beispiel: Ein Teilchen mit konstanter Masse bewege sich etwa durch das Gravitationsfeld

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} G\frac{Mm}{r}$$

eines Himmelskörpers oder, allgemeiner, durch irgendein Potentialfeld $\vec{F} = -\operatorname{grad} U$. Nach dem zweiten NEWTONschen Gesetz gilt dann für die Bahn $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ des Teilchens mit der Zeit t als Parameter

$$\vec{F}\big(\gamma(t)\big) = m\ddot{\gamma}(t)\,,$$

d.h. die im Punkt $\gamma(t)$ wirkende Kraft ist gleich der Masse des Teilchens mal seiner Beschleunigung. Also ist in jedem Punkt $\gamma(t)$

$$m\ddot{\gamma}(t) + \operatorname{grad} U\big(\gamma(t)\big) = 0\,.$$

Um aus dieser Vektorgleichung eine skalare Beziehung abzuleiten, bilden wir das Skalarprodukt mit dem Geschwindigkeitsvektor $\dot{\gamma}(t)$:

$$0 = m\ddot{\gamma}(t)\cdot\dot{\gamma}(t) + \operatorname{grad} U\big(\gamma(t)\big)\cdot\dot{\gamma}(t)$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{\gamma}(t)\cdot\dot{\gamma}(t) + U\big(\gamma(t)\big)\right)\,.$$

Also ist

$$E = \frac{m\left|\dot{\gamma}(t)\right|^2}{2} + U\big(\gamma(t)\big)$$

konstant, und das ist der klassische Energieerhaltungssatz: Die Summe aus kinetischer und potentieller Energie ist eine zeitlich unveränderliche Erhaltungsgröße.

Die wesentliche Annahme über das Feld $\vec{F}$, die wir in dieser Rechnung benutzten, war die Darstellung von $\vec{F}$ als Gradient einer Funktion; wir definieren daher

Definition: Ein Vektorfeld $\vec{V}\colon D \to \mathbb{R}^n$ im $\mathbb{R}^n$ heißt *konservativ,* wenn es eine differenzierbare Funktion $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ gibt, so daß $\vec{V} = \operatorname{grad}\varphi$ ist. φ heißt *Stammfunktion* von $\vec{V}$ und $-\varphi$ *Potentialfunktion.*

Der Name „konservativ“ kommt vom lateinischen *conservare* = erhalten; der Grund für das negative Vorzeichen der Potentialfunktion liegt darin, daß der Gradient die Richtung des stärksten *Anstiegs* einer Funktion ist, wohingegen die Natur versucht, ein System zum Energie*minimum* zu bringen, so daß die Kräfte in Gegenrichtung zum Gradienten wirken.

Satz: Für ein Vektorfeld $\vec{V}: D \to \mathbb{R}^n$ auf einer offenen zusammenhängenden Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1.) $\vec{V}$ ist konservativ.
2.) Für jede Kurve γ in D hängt $\int_\gamma \vec{V} \cdot ds$ nur ab von den Endpunkten von γ.
3.) $\vec{V}$ ist zirkulationsfrei.

Beweis: 1.) $\Rightarrow$ 2.): Falls $\vec{V}$ konservativ ist, gibt es eine Stammfunktion f auf D, so daß $\vec{V} = \operatorname{grad} f$ ist. Für eine Kurve $\gamma: [a, b] \to D$ ist daher nach der Kettenregel

$$\int_\gamma \vec{V} \cdot ds = \int_a^b \vec{V}\big(\gamma(t)\big) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt = \int_a^b \operatorname{grad} f\big(\gamma(t)\big) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} f\big(\gamma(t)\big)\, dt = f\big(\gamma(b)\big) - f\big(\gamma(a)\big)\,.$$

Damit ist das Integral, genau wie wir es vom Eindimensionalen gewohnt sind, einfach gleich der Differenz der Werte der Stammfunktion am Endpunkt und am Anfangspunkt der Kurve.

2.) $\Rightarrow$ 3.): Diese Implikation ist klar, denn wenn der Wert des Integrals nicht von der Kurve abhängt, ist das Integral längs einer geschlossenen Kurve gleich dem Integral längs der zu einem Punkt degenerierten Kurve, und das ist natürlich gleich Null.

3.) $\Rightarrow$ 2.): γ und δ seien zwei Kurven mit Anfangspunkt $\mathbf{x}_0$ und Endpunkt $\mathbf{x}_1$. Sowohl γ als auch δ sind aus Kurvenstücken zusammengesetzt; indem wir diese noch weiter unterteilen, können wir o.B.d.A. annehmen, daß auch alle Kurven*stücke* von γ und δ jeweils dieselben Anfangs- und Endpunkte haben, und dann reicht es natürlich, die Aussage für zwei Kurvenstücke $\gamma: [a, b] \to \mathbb{R}^n$ und $\delta: [c, d] \to \mathbb{R}^n$ zu beweisen.

Dazu betrachten wir das Kurvenstück

$$\delta^*: [c, d] \to \mathbb{R}^n; \quad t \mapsto \delta(c + d - t)\,,$$

d.h. also, das rückwärts durchlaufene Kurvenstück δ. Da γ und δ dieselben Anfangs- und Endpunkte haben, definieren γ und δ^* zusammen eine geschlossene Kurve $\widetilde{\gamma} = \gamma + \delta^*$. Nach Voraussetzung verschwindet das Integral längs dieser Kurve, d.h.

$$0 = \int_{\widetilde{\gamma}} \vec{V}\, ds = \int_\gamma \vec{V}\, ds + \int_{\delta^*} \vec{V}\, ds = \int_\gamma \vec{V}\, ds - \int_\delta \vec{V}\, ds\,,$$

und damit sind die Integrale über γ und δ gleich.

2) $\Rightarrow$ 1): $\mathbf{x}_0$ sei irgendein beliebig ausgewählter Punkt von D. Da D zusammenhängend ist, gibt es dann für jeden Punkt $\mathbf{x} \in D$ eine Kurve $\gamma_{\mathbf{x}}$ mit Anfangspunkt $\mathbf{x}_0$ und Endpunkt $\mathbf{x}$.

Diese Existenz einer Kurve folgt eigentlich nicht aus der Definition von Zusammenhang, wie wir sie aus der Analysis I kennen, sondern aus der des *Wegzusammenhangs,* die ja im allgemeinen stärker ist. Für offene Mengen in $\mathbb{R}^n$ stimmen die beiden Definitionen jedoch überein: Sei nämlich D_0 die Menge aller Punkte aus der offenen Menge D, die mit dem Punkt $x_0 \in D$ durch einen Weg verbunden werden können. Dann ist D_0 offen, denn für $\mathbf{x}_1 \in D_0$ gibt es wegen der Offenheit von D eine ε-Umgebung von $\mathbf{x}_1$, die ganz in D liegt. Da jeder Punkt dieser ε-Umgebung durch eine Strecke mit dem Mittelpunkt $\mathbf{x}_1$ verbunden werden kann, liegt auch diese Umgebung in D_0, d.h. D_0 ist offen.

Aber auch das Komplement von D_0 in D ist offen, denn auch für einen Punkt $\mathbf{x}_2 \in D \setminus D_0$ enthält D eine ε-Umgebung. Läge diese nicht ganz in $D \setminus D_0$, gäbe es dort einen Punkt x_3, der durch einen geeigeten Weg mit $\mathbf{x}_0$ verbunden werden könnte. Da aber $\mathbf{x}_3$ durch eine Strecke mit $\mathbf{x}_2$ verbunden werden kann, gäbe dann auch einen Weg von $\mathbf{x}_2$ nach $\mathbf{x}_0$, im Widerspruch zur Annahme. Also ist $D \setminus D_0$ offen.

Damit ist D also Vereinigung der offenen und disjunkten Teilmengen D_0 und $D \setminus D_0$; wenn D zusammenhängend ist, geht das nur, wenn eine der beiden Mengen leer ist. D_0 enthält den Punkt $\mathbf{x}_0$, also ist $D \setminus D_0 = \emptyset$ und somit $D = D_0$. Also kann jeder Punkt aus D durch einen Weg mit $\mathbf{x}_0$ verbunden werden, und damit ist D wegzusammenhängend.

Wir definieren nun einen Kandidaten für eine Stammfunktion durch

$$F(\mathbf{x}) = \int_{\gamma_{\mathbf{x}}} \vec{V}\, ds\,;$$

wegen der Voraussetzung *2)* hängt $F(\mathbf{x})$ in der Tat nur von $\mathbf{x}$ ab und nicht von der Wahl eines Wegs $\gamma_{\mathbf{x}}$.

Für einen Vektor $\vec{h}$, für den auch $\mathbf{x}+\vec{h}$ noch in D liegt, gibt es eine Stecke η, die $\mathbf{x}$ mit $\mathbf{x}+\vec{h}$ verbindet, und

$$F(\mathbf{x}+\vec{h})-F(\mathbf{x})=\int\limits_{\gamma_{\mathbf{x}+\vec{h}}}\vec{V}\,ds-\int\limits_{\gamma_{\mathbf{x}}}\vec{V}\,ds=\int\limits_{\eta}\vec{V}\,ds\,.$$

Speziell für einen Vektor $\vec{h}=h\vec{e}_i$ der Länge h in Richtung des Einheitsvektors $\vec{e}_i$ der Koordinatenachse x_i ist

$$\int\limits_{\eta}\vec{V}\,ds=\int\limits_{\eta}V_i\,dx_i=\int\limits_0^h V_i(\mathbf{x}+t\vec{e}_i)\,dt\,,$$

und damit

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(\mathbf{x}+h\vec{e}_i)-F(\mathbf{x})}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_0^h V_i(\mathbf{x}+t\vec{e}_i)\,dt=V_i(\mathbf{x})$$

nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für Funktionen einer reellen Veränderlichen. Damit ist $\operatorname{grad}F=\vec{V}$, das Vektorfeld hat also eine Stammfunktion. ∎

Im $\mathbb{R}^3$ sollten wir erwarten, daß es noch eine vierte äquivalente Charakterisierung konservativer Vektorfelder gibt: Da die Zirkulationsfreiheit mit Drehungen um eine Achse zusammenhängt, sollte für solche Felder auch die Rotation verschwinden. Die eine Richtung ist trivial:

Lemma: Für ein konservatives Vektorfeld $\vec{V}: D\to\mathbb{R}^3$ auf $D\subseteq\mathbb{R}^3$ ist $\operatorname{rot}\vec{V}\equiv 0$ auf D.

Beweis: Nach den Rechenregeln aus §4*f)* gilt mit der Stammfunktion f von $\vec{V}$

$$\operatorname{rot}\vec{V}=\operatorname{rot}\operatorname{grad}f=0\,.$$

∎

Die umgekehrte Richtung ist allerdings zumindest in dieser Allgemeinheit falsch. Als **Gegenbeispiel** betrachten wir das Magnetfeld eines

geradlinigen stromdurchflossenen Leiters, d.h. also das Vektorfeld

$$\vec{V}(x,y,z)=\frac{1}{4\pi(x^2+y^2)}\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}\,.$$

Wie wir in §4*e2)* gesehen haben, verschwindet seine Rotation überall dort, wo das Vektorfeld definiert ist, d.h. überall außerhalb der z-Achse.

Trotzdem ist das Vektorfeld nicht zirkulationsfrei, denn für den Einheitskreis

$$\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3;\,t\mapsto(\cos t,\sin t,0)$$

ist

$$\int\limits_{\gamma}\vec{V}\,ds=\int\limits_0^{2\pi}\vec{V}\big(\gamma(t)\big)\dot{\gamma}(t)\,dt=\int\limits_0^{2\pi}\begin{pmatrix}-\sin t\\\cos t\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sin t\\\cos t\\0\end{pmatrix}\,dt$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}dt=2\pi\,.$$

Der Grund für dieses Verhalten liegt, wie wir bald sehen werden, darin, daß $\vec{V}$ auf der z-Achse nicht definiert ist: Obwohl die z-Achse im Vergleich zum gesamten $\mathbb{R}^3$ nur einen – sollte man meinen – vernachlässigbar geringen Teil ausmacht, genügt selbst diese minimale Definitionslücke, um die Umkehrung des Lemmas falsch zu machen.

§6: Mehrdimensionale Integrationstheorie

Die bisher betrachteten Kurvenintegrale waren alle zurückführbar auf gewöhnliche RIEMANN-Integrale über Funktionen einer reellen Veränderlichen. Mit ihrer Hilfe ist es möglich, die Länge von Kurven zu bestimmen, nicht aber Flächeninhalte oder Volumen von höherdimensionalen geometrischen Gebilden. Deren Berechnung, sowie die von naheliegenden Verallgemeinerungen wie dem Fluß durch die Oberfläche eines Bereichs sind Gegenstand dieses Paragraphen.

a) Flächeninhalte und Volumina

Beginnen wir mit Flächeninhalten und Volumina. Bereits das RIEMANN-Integral aus Kapitel 1 von **[HM1]** konnte als Flächeninhalt interpretiert werden, allerdings nur für die Fläche zwischen der x-Achse und einer Kurve zwischen zwei gegebenen x-Koordinaten. Hier soll es nun um beliebige Flächen im $\mathbb{R}^2$, Volumina im $\mathbb{R}^3$ und die entsprechenden höherdimensionalen Konzepte gehen.

Bei der Definition des RIEMANN-Integrals in **[HM1]**, *Kapitel I,* §2 hatten wir die Fläche unterhalb der Kurve durch Rechtecke angenähert, deren Kantenlänge in x-Richtung immer kleiner wurde, während die Kantenlänge in y-Richtung durch die y-Koordinaten der Kurve $y = f(x)$ gegeben war. Im allgemeinen Fall, wo es keine ausgezeichnete Richtung mehr gibt, wird diese Unterscheidung zwischen x- und y-Richtung offensichtlich sinnlos; die einzig mögliche Verallgemeinerung des RIEMANN-Integrals besteht darin, daß man eine Fläche durch *beliebige* Rechtecke annähert und beim Grenzübergang *beide* Seiten gegen Null gehen läßt.

Ganz entsprechend müssen für dreidimensionale Bereiche Quader betrachtet werden, deren drei Seiten mit Verfeinerung der Überdeckung immer kleiner werden, *usw.*

Formal gehen wir dazu wie folgt vor: Wir wählen ein festes Koordinatensystem im $\mathbb{R}^n$ und betrachten Quader $\mathbb{Q}_i \subset \mathbb{R}^n$, deren Kanten parallel zu denn Koordinatenachsen sind. (Für $n = 2$ sind diese „Quader“ natürlich Rechtecke, und für $n = 1$ Intervalle.) Das Volumen eines solchen Quaders soll gleich dem Produkt der Kantenlängen sein, genau wie wir es aus der Elementargeometrie gewohnt sind.

Definition: Eine *Elementarmenge* in $\mathbb{R}^n$ ist eine Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$, die als Vereinigung endlich vieler Quader mit achsenparallelen Kanten geschrieben werden kann; dabei dürfen sich zwei Quader höchstens in gemeinsamen Randflächen, Kanten oder Ecken schneiden.

Im $\mathbb{R}^2$ wäre also beispielsweise jede Menge, deren Rand auf kariertem Papier so gezeichnet werden kann, daß alle Linien auf Karokanten liegen, eine Elementarmenge.

Das Volumen $V(E)$ einer Elementarmenge E definieren wir als die Summe der Volumina der endlich vielen Quader, aus denen die Menge besteht; man überlegt sich leicht, daß es unabhängig von der Art der Zerlegung der Menge in Quader ist.

Nun gehen wir im wesentlichen genauso vor, wie bei der Definition des RIEMANN-Integrals: Dort hatten wir die Fläche unterhalb einer Kurve $y = f(x)$ sowohl von oben als auch von unten durch Rechtecke angenähert; die Flächen der entsprechenden Elementarmengen hatten wir als RIEMANNsche Unter- *bzw.* Obersummen bezeichnet. Das Integral existierte nach Definition genau dann, wenn bei immer weiterer Verfeinerung der Überdeckung die Untersummen und die Obersummen gegen einen gemeinsamen Grenzwert konvergierten.

Entsprechend betrachten wir zur Definition des Volumens einer Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ Elementarmengen, die ganz in B enthalten sind und bezeichnen den Grenzwert bei immer feiner werdenden Quader als *unteres Volumen* $\underline{V}(B)$. Zur exakten Definition verwenden wir besser nicht einen Grenzwert, da es etwas umständlich wäre, hier zu definieren, über was genau wir den Grenzwert bilden, sondern wir definieren $\underline{V}(B)$ einfach als *Supremum* der Volumina aller Elementarmengen, die in B liegen:

$$\underline{V}(B) \underset{\text{def}}{=} \sup\{V(E) \mid E \subseteq B \text{ Elementarmenge}\},$$

falls dieses Supremum existiert. (Es existiert offensichtlich genau dann, wenn die Menge B beschränkt ist; für unbeschränkte Mengen wie etwa den gesamten $\mathbb{R}^n$ wäre die Menge aller $V(E)$ unbeschränkt, so daß kein Supremum existiert.)

Genauso definieren wir ein oberes Volumen $\overline{V}(B)$ als *Infimum* der Volumina aller Elementarmengen, die B enthalten:

$$\overline{V}(B) \underset{\text{def}}{=} \inf\{V(E) \mid E \supseteq B \text{ Elementarmenge}\},$$

falls dieses Infimum existiert. (Auch hier ist die Existenz wieder an die Beschränktheit von B gekoppelt, denn für ein unbeschränkte Menge B gibt es keine Elementarmenge, die B enthält, so daß wir das Infimum über die leere Menge bilden müßten.)

Die Definition des Volumens ist nun fast selbstverständlich:

Definition: Wir sagen, die Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ habe das Volumen $V(B)$, falls das untere Volumen $\underline{V}(B)$ und das obere Volumen $\overline{V}(B)$ beide existieren und gleich $V(B)$ sind.

Ganz entsprechend können wir auch Integrale über Funktionen definieren: $f\colon D \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion auf der Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$, und $B \subseteq D$ sei eine Teilmenge von D. Dann können wir wieder RIEMANNsche Untersummen definieren, indem wir eine Elementarmenge $E \subseteq D$ betrachten, bestehend etwa aus den Quadern $Q_1, \dots, Q_N$, und dazu die RIEMANNsche Untersumme definieren als

$$\sum_{i=1}^{N} V(Q_i) \cdot \inf\{f(\mathbf{x}) \mid x \in Q_i\} .$$

Die RIEMANNsche Obersumme für die Elementarmenge $E' \supseteq B$ bestehend aus den Quadern $Q'_1, \dots, Q'_M$ ist entsprechend

$$\sum_{j=1}^{M} V(Q'_j) \cdot \sup\{f(\mathbf{x}) \mid x \in Q_j\} ,$$

und wir definieren

Definition: $\int \underset{B}{\cdots} \int f(\mathbf{x})\, dx_1 \dots dx_n$ existiert, wenn das Supremum der Menge aller RIEMANNscher Untersummen gleich dem Infimum der Menge aller RIEMANNscher Obersummen ist; dieser gemeinsame Wert ist der Wert des Integrals.

Die Schreibweise $\int \underset{B}{\cdots} \int f(\mathbf{x})\, dx_1 \dots dx_n$ soll dabei bedeuten, daß wir n Integralzeichen schreiben, für $B \subset \mathbb{R}^2$ also

$$\iint\limits_B f(x,y)\, dx\, dy$$

und für $B \subset \mathbb{R}^3$

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz .$$

(Nicht alle Lehrbücher verwenden bei der mehrdimensionalen Integration mehrere Integralzeichen; einige, wie etwa **[D]**, schreiben unabhängig von der Dimension immer nur ein Integralzeichen. In Physik und Technik scheint die Schreibweise mit mehreren Integralzeichen üblicher zu sein, deshalb verwenden wir diese Konvention.)

Integrale und Volumina sind natürlich eng miteinander verwandt: Einerseits läßt sich das Volumen eines Bereichs B auch als

$$V(B) = \int \underset{B}{\cdots} \int 1\, dx_1 \cdots dx_n$$

schreiben, andererseits ist, völlig analog zur Flächeninterpretation des RIEMANN-Integrals, für eine auf B nichtnegative Funktion f

$$\int \underset{B}{\cdots} \int f(\mathbf{x})\, dx_1 \cdots dx_n =$$

$$V\left(\left\{(x_1, \dots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \begin{array}{l}(x_1, \dots x_n) \in B \text{ und}\\ 0 \le y \le f(x_1, \dots, x_n)\end{array}\right\}\right) .$$

Auch für das so definierte mehrdimensionale Integral gelten aus offensichtlichen Gründen die Analoga der aus **[HM1]**, *Kapitel 1, §3* bekannten Rechenregeln wie die *Monotonieregel*

$$\int \underset{B}{\cdots} \int f(\mathbf{x})\, dx_1 \cdots dx_n \le \int \underset{B}{\cdots} \int g(\mathbf{x})\, dx_1 \cdots dx_n ,$$

falls $f(\mathbf{x}) \le g(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in B$, und die *Linearität*seigenschaft

$$\int \underset{B}{\cdots} \int \big(\alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(x)\big)\, dx_1 \cdots dx_n$$

$$= \alpha \int \underset{B}{\cdots} \int f(\mathbf{x})\, dx_1 \cdots dx_n + \beta \int \underset{B}{\cdots} \int g(\mathbf{x})\, dx_1 \cdots dx_n .$$

Außerdem haben wir wieder einen

Mittelwertsatz: Für einen zusammenhängenden abgeschlossenen und beschränkten Bereich $B \subset \mathbb{R}^n$ und eine stetige Funktion $f : B \to \mathbb{R}$ gibt es einen Punkt $\mathbf{x}_0 \in B$, so daß gilt

$$\int_B \cdots \int f(\mathbf{x})\, dx_1 \cdots dx_n = f(\mathbf{x}_0) \cdot \textit{Volumen von } B\,.$$

Der *Beweis* geht ganz genauso wie in $\mathbb{R}$: Da B beschränkt und abgeschlossen (also kompakt) ist, nimmt die stetige Funktion f auf B sowohl ihr Maximum an als auch ihr Minimum; sei etwa $\mathbf{x}_1 \in B$ ein Punkt, in dem f minimal wird, und $\mathbf{x}_2$ einer, in dem f maximal wird. Dann ist für jedes $\mathbf{x} \in B$

$$f(\mathbf{x}_1) \le f(\mathbf{x}) \le f(\mathbf{x}_2)\,,$$

nach der Monotonieregel ist also

$$\int_B \cdots \int f(\mathbf{x}_1)\, dx_1 \cdots dx_n = f(\mathbf{x}_1) \cdot \textit{Volumen von } B$$

kleiner oder gleich

$$\int_B \cdots \int f(\mathbf{x})\, dx_1 \cdots dx_n\,,$$

was wiederum kleiner oder gleich

$$\int_B \cdots \int f(\mathbf{x}_2)\, dx_1 \cdots dx_n = f(\mathbf{x}_2) \cdot \textit{Volumen von } B$$

ist. Damit gibt es eine Zahl η zwischen $f(\mathbf{x}_1)$ und $f(\mathbf{x}_2)$, so daß

$$\int_B \cdots \int f(\mathbf{x})\, dx_1 \cdots dx_n = \eta \cdot \textit{Volumen von } B$$

ist. Wegen der Stetigkeit von f, und da B zusammenhängend ist, gibt es dazu nach dem Zwischenwertsatz (mindestens) einen Punkt $\mathbf{x}_0 \in B$ mit $f(\mathbf{x}_0) = \eta$, und für diesen Punkt ist der Satz erfüllt. ■

Wie beim gewöhnlichen (eindimensionalen) RIEMANN-Integral ist die Existenz von mehrdimensionalen Integralen normalerweise kein Problem, allerdings kann man natürlich leicht Beispiele konstruieren, für die das Integral nicht existiert. Wir können etwa in Analogie zur DIRICHLETschen Sprungfunktion die Menge

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x, y \in \mathbb{Q} \text{ und } 0 \le x, y \le 1\right\}$$

aller Punkte mit rationalen Koordianten im Einheitsquadrat betrachten. Da $\mathbb{Q}$ keine reellen Intervalle enthält, sind alle Rechtecke, die ganz in B enthalten sind, zu Punkten degeneriert. Eine in B enthaltene Elementarmenge besteht also aus endlich vielen Punkten und hat somit den Flächeninhalt null. Eine Elementarmenge, die ganz B enthält, muß aber das gesamte Einheitsquadrat enthalten, da die rationalen Punkte dort dicht liegen; sie hat also mindestens die Fläche eins. Somit ist eins der obere und null der untere Flächeninhalt von B; der Flächeninhalt von B existiert also nicht.

Die folgende Überlegung liefert ein Kriterium für die Existenz des Volumens einer Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$: Die Differenzmenge zwischen einer Elementarmenge, die B enthält, und einer Elementarmenge, die in B enthalten ist, kann offenbar wieder als Elementarmenge aufgefaßt werden und enthält den Rand von B. Je besser die äußere und die innere Elementarmenge B annähern, desto weniger unterscheidet sich diese Differenzmenge vom Rand; die Existenz eines Volumens von B ist daher äquivalent dazu, daß das Volumen des Rands von B existiert und verschwindet.

Wie wir bereits wissen, existiert das Volumen einer Menge B ganz sicher dann nicht, wenn B unbeschränkt ist. Entsprechend ist für eine solche Menge *a priori* das Integral einer Funktion f über B nicht definiert, da obige Definition nur anwendbar ist, wenn B in einer Elementarmenge enthalten ist.

Im eindimensionalen hatten wir dasselbe Phänomen: Die Definition des RIEMANN-Integrals ist nur für endliche Integrationsbereiche anwendbar. Trotzdem hatten wir in **[HM1]**, *Kapitel I,* §7 auch Integrale über unendliche Intervalle definiert, sogenannte uneigentliche Integrale, und wir hatten gesehen, daß diese für hinreichend schnell abfallende Funktionen existieren. Dort hatten wir beispielsweise definiert

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} f(x)\,dx\,,$$

falls dieser Grenzwert existiert. Genauso definieren wir jetzt

Definition: $B \subseteq \mathbb{R}^n$ sei eine unbeschränkte Menge und die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ sei in einer B umfassenden Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ erklärt. Wir sagen, das *uneigentliche Integral*

$$\int\cdots\int_B f(\mathbf{x})\,dx_1\cdots dx_n$$

existiere, wenn für jede Folge

$$B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_i \subset \cdots$$

von beschränkten Mengen B_i mit

$$\bigcup_{i\geq 1} B_i = B$$

der Grenzwert

$$\lim_{i\to\infty} \int\cdots\int_{B_i} f(\mathbf{x})\,dx_1\cdots dx_n$$

existiert und wenn er für jede solche Folge denselben Wert hat. Diesen gemeinsamen Wert bezeichnen wir als den Wert des uneigentlichen Integrals.

Wie auch im Eindimensionalen genügt es hier nicht, nur eine einzige Folge von Mengen B_i zu betrachten; ansonsten könnte man beispielsweise dem uneigentlichen Integral

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \sin x \sin y\,dx\,dy$$

je nachdem, ob man für die B_i Quadrate nimmt, in deren Eckpunkten der Cosinus für beide Koordinaten verschwindet, oder Quadrate, in

deren Eckpunkten die beiden Cosinus einen konstanten anderen Wert haben, dem Integral die verschiedensten Werte zuordnen. Tatsächlich aber existiert dieses uneigentliche Integral natürlich genauso wenig wie das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,dx$ im Eindimensionalen.

Für interessantere Beispiele sei auf den nächsten Abschnitt verwiesen, wo wir

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

berechnen werden.

b) Integration über Normalbereiche und der Satz von Fubbini

Der Grund dafür, daß wir bislang noch keine interessanten Beispiele haben, liegt natürlich darin, daß man die Werte von Integralen fast nie durch Anwendung der Definition bestimmt. Im Eindimensionalen hatten wir stattdessen meist den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung benutzt, über den die Berechnung eines Integrals auf die (nicht immer explizit mögliche) Bestimmung einer Stammfunktion zurückgeführt wurde; hier, im Mehrdimensionalen, wollen wir die Integration soweit wie möglich auf mehrfache eindimensionale Integration zurückführen. Zumindest in einem Fall wissen wir schon, wie das geht: Ist die Funktion f auf dem Intervall $[a,b]$ nichtnegativ, so hat

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \leq x \leq b \text{ und } 0 \leq y \leq f(x)\right\}$$

die Fläche

$$\iint_B dx\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Auch den Flächeninhalt der etwas komplizierteren Menge

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \leq x \leq b \text{ und } g(x) \leq y \leq h(x)\right\}$$

läßt sich, wenn $g(x) \leq h(x)$ ist für alle $x \in [a,b]$, durch das eindimensionale Integral

$$\iint_B dx\,dx = \int_a^b \big(h(x) - g(x)\big)\,dx$$

ausdrücken. Ähnliche Formeln gelten auch nach Vertauschung der Rollen von x und y.

Definition: Eine Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^2$ heißt *Normalbereich vom Typ I,* wenn es reelle Zahlen $a \le b$ und stetig differenzierbare Funktionen $g, h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gibt mit $g(x) \le h(x)$ für alle $x \in [a,b]$, so daß

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \le x \le b \text{ und } g(x) \le y \le h(x)\right\}$$

ist. B heißt *Normalbereich vom Typ II,* wenn es reelle Zahlen $c \le d$ und stetig differenzierbare Funktionen $g, h\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ gibt mit $g(y) \le h(y)$ für alle $y \in [a,b]$, so daß

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; c \le y \le d \text{ und } g(y) \le x \le h(y)\right\}.$$

Für diese Normalbereiche können wir nicht nur die Fläche leicht ausrechnen, sondern auch beliebige Integrale über stetige Funktionen:

Satz: $f\colon D \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$.
a) Für einen Normalbereich $B \subseteq D$ vom Typ I ist

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right) dx .$$

b) Für einen Normalbereich $B \subseteq D$ vom Typ II ist

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\,dx \right) dy .$$

Beweis: Wir wissen bereits, daß der Flächeninhalt von B existiert; da f eine stetige Funktion ist, folgt dann auch ohne größere Schwierigkeiten die Existenz des Integrals von f über B. Wir wollen darauf nicht genauer eingehen, sondern nur benutzen, daß es dann ausreicht, spezielle Folgen von Elementarmengen zu betrachten. Eine solche spezielle Folge erhalten wir etwa dadurch, daß wir den ganzen $\mathbb{R}^2$ mit einem Quadrategitter überziehen; die Seitenlänge der Quadrate sei $k = \frac{b-a}{N}$ und ihr Flächeninhalt dementsprechend gleich k^2.

Da die Aussage *b)* durch Vertauschung der beiden Koordinaten in *a)* übergeht, reicht es, den Satz für Normalbereiche vom Typ I zu beweisen.

Als in B enthaltene Elementarmenge E_N wählen wir die Menge aller Quadrate, die ganz in B liegen; als B enthaltende Elementarmenge E'_N entsprechend die Menge aller Quadrate, die nichtleeren Durchschnitt mit B haben. Wir numerieren die Quadrate in E_N und E'_N mit zwei Indizes: Das Intervall $[a,b]$ wird durch das Quadrategitter in $N-1$ Teilintervalle der Länge k zerlegt; das Quadrat Q_{ij} liege über dem i-ten dieser Teilintervalle und sei, von unter her gesehen, das j-te Quadrat, das ganz in B liegt. Die Anzahl der ganz in B liegenden Quadrate im i-ten Streifen sei r_i; dann ist die RIEMANNsche Untersumme zu E_N gleich

$$\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{r_i} V(Q_{ij}) \cdot \inf_{(x,y)\in Q_{ij}} f(x,y) = \sum_{i=1}^{N-1} \left(\sum_{j=1}^{r_i} \inf_{(x,y)\in Q_{ij}} f(x,y) \cdot k \right) \cdot k .$$

Für die RIEMANNsche Obersumme müssen wir alle Quadrate betrachten, die mit B nichtleeren Durchschnitt haben; dabei treten im allgemeinen auch Quadrate Q_{ij} unterhalb von Q_{i1} auf, für deren Bezeichnung wir Indizes $j \le 0$ verwenden.

Im i-ten Streifen mögen die Q_{ij} mit $s_i \le j \le t_i$ auftreten; dann ist die RIEMANNsche Obersumme gleich

$$\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=s_i}^{t_i} V(Q_{ij}) \cdot \sup_{(x,y)\in Q_{ij}} f(x,y) = \sum_{i=1}^{N-1} \left(\sum_{j=s_i}^{t_i} \sup_{(x,y)\in Q_{ij}} f(x,y) \cdot k \right) \cdot k .$$

Da f als stetige Funktion RIEMANN-integrierbar ist, konvergieren für $N \to \infty$ und damit $k \to 0$

$$\sum_{j=1}^{r_i} \inf_{(x,y)\in Q_{ij}} f(x,y) \cdot k \quad \text{und} \quad \sum_{j=s_i}^{t_i} \sup_{(x,y)\in Q_{ij}} f(x,y) \cdot k$$

beide gegen

$$\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy ;$$

die RIEMANNschen Unter- und Obersummen daher entsprechend gegen

$$\int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right) dx\,,$$

wie behauptet. ■

Als erstes Beispiel berechnen wir zur Kontrolle etwas Altbekanntes, die Fläche der Einheitskreisscheibe

$$B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \le 1 \right\},$$

die wir hier umständlich als

$$\iint_B dx\,dy$$

ausrechnen wollen.

B kann sowohl als Normalbereich vom Typ I wie auch als solcher vom Typ II geschrieben werden:

$$\begin{aligned} B &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1 \le x \le 1 \text{ und } -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2} \right\} \\ &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1 \le y \le 1 \text{ und } -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2} \right\}. \end{aligned}$$

In der ersten Darstellung ist nach Teil *a)* des gerade bewiesenen Satzes

$$\iint_B dx\,dy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \right) dx = \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}\,dx\,.$$

Nach **[HM1]**, *Kapitel 1,* §5c, ist

$$\int \sqrt{1-x^2} = \tfrac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x \right) + C\,,$$

also

$$\iint_B dx\,dy = \left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x \right) \Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi\,,$$

wie erwartet.

Etwa interessanter ist die Berechnung des (hoffentlich auch bekannten) Volumens der Einheitskugel

$$K = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \right\}.$$

Hierzu könnten wir eine dreidimensionale Integration durchführen, es geht aber zum Glück auch einfacher: Natürlich genügt es, das Volumen der Halbkugel $z \ge 0$ zu bestimmen, und dies ist die Menge aller Punkte zwischen der Einheitskreisscheibe B der (x,y)-Ebene und dem Graph der Funktion

$$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$$

über B. Somit ist das Volumen der Halbkugel gleich

$$\iint_B \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy \right) dx\,.$$

Schreibt man mit $a = \sqrt{1-x^2}$

$$\sqrt{1-x^2-y^2} = \sqrt{a^2-y^2} = a\sqrt{1-\left(\frac{y}{a}\right)^2}$$

und führt die Integration dieser Funktion via Substitutionsregel zurück auf die gerade durchgeführte Integration von $\sqrt{1-x^2}$, so erhält man die Formel

$$\int \sqrt{a^2-y^2} = \tfrac{1}{2}\left(y\sqrt{a^2-y^2} + a^2 \arcsin \tfrac{y}{a} \right);$$

das innere Integral ist also

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy = \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-y^2}\,dy$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(y\sqrt{a^2-y^2} + a^2 \arcsin \frac{y}{a} \right) \Big|_{-a}^{a} = \tfrac{1}{2}a^2\pi = \tfrac{1}{2}\pi(1-x^2)\,.$$

Somit ist

$$\iint_B \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} \tfrac{1}{2}\pi(1-x^2)\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2\pi}{3},$$

und das Kugelvolumen als Volumen zweier Halbkugeln ist in der Tat, wie es sein soll, gleich $4\pi/3$.

In Fällen wie diesem, wo eine Menge als Normalbereich vom Typ I oder II dargestellt werden kann, lassen sich sowohl Teil *a)* als auch Teil *b)* des obigen Satzes anwenden, und natürlich muß in beiden Fällen das Ergebnis dasselbe sein, nämlich das Integral von f über die Menge B. Dies können wir insbesondere für ein Rechteck

$$B = [a,b]\times[c,d] = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; a\le x\le b \text{ und } c\le y\le d\right\}$$

anwenden; hier ist

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy\,,$$

d.h die Integrationsreihenfolge kann vertauscht werden. Diese Aussage bezeichnet man als den

Satz von Fubbini: Für eine im Rechteck $[a,b]\times[c,d]$ stetige Funktion f ist

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy\,.$$

■

c) Die Transformationsformel

Bei der eindimensionalen Integration war die Substitutionsregel das wichtigste Werkzeug für die Vereinfachung von Integralen und führte

oft sogar zu einer expliziten Stammfunktion. Die Idee war bekanntlich, daß wir die Integrationsvariable x als Funktion $x=\varphi(t)$ einer neuen Variablen t schrieben; mit $a=\varphi(t_0)$ und $b=\varphi(t_1)$ ist dann

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_0}^{t_1} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt\,.$$

Genauso können wir auch bei einer Funktion mehrerer Veränderlicher diese als Funktionen neuer Variabler schreiben. Beginnen wir der Anschaulichkeit halber mit einer Funktion $f(x,y)$ zweier Veränderlicher und schreiben wir diese als Funktionen

$$x = x(u,v) \quad\text{und}\quad y = y(u,v)$$

zweier neuer Variabler u und v. Ein wichtiges Beispiel, das man zur Veranschaulichung während der folgenden Rechnungen im Kopf behalten sollte, ist die Polarkoordinatensdarstellung

$$x = r\sin\varphi \quad\text{und}\quad y = r\cos\varphi\,.$$

Zur Definition des Integrals

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy$$

approximierten wir den Intgegrationsbereich B durch kleine achsenparallele Rechtecke. Wenn wir statt über x und y über u und v integrieren, müssen wir entsprechend den Bereich B', in dem sich diese neuen Variablen bewegen, in achsenparallele Rechtecke zerlegen; dabei fordern wir nun natürlich Parallelität zur u- und zur v-Achse. Wir betrachten ein festes dieser Rechtecke; es habe die Eckpunkte

$$(u_0,v_0),\quad (u_0+h,v_0),\quad (u_0,v_0+k)\quad\text{und}\quad (u_0+h,v_0+k)$$

und somit den Flächeninhalt hk.

Die Menge der Punkte (x,y), die zu den Punkten (u,v) aus diesem Rechteck gehören, d.h. also die Menge

$$\left\{\big(x(u,v),y(u,v)\big) \;\middle|\; u_0\le u\le u_0+h \quad\text{und}\quad v_0\le v\le v_0+k\right\}$$

ist natürlich im allgemeinen kein Rechteck, sondern eine krummlinig begrenzte Figur; im Beispiel der Polarkoordinaten etwa wäre sie ein Winkelbereich zwischen zwei Kreisbögen. (An den bei Polarkoordinaten etwas problematischen Nullpunkt als Ecke denken wir in diesen Zusammenhang am besten nicht; es ist klar, daß sein Einfluß bei immer kleiner werdenden Rechtecken für eine um den Nullpunkt beschränkte Funktion f immer kleiner wird.)

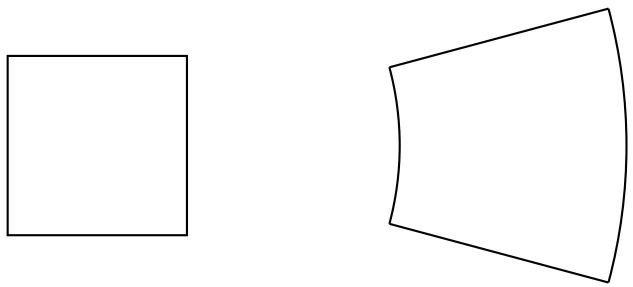


Abb. 24: Rechteck in (r,φ)-Ebene mit Bild in (x,y)-Ebene

Trotzdem machen wir, wenn x und y *differenzierbare* Funktionen von u und v sind, bei kleinen Rechtecken keinen allzu großen Fehler, wenn wir die transformierte Menge als *Parallelogramm* betrachten, denn nach Definition der Differenzierbarkeit ist

$$\begin{aligned} x(u_0+h,v_0) &= x(u_0,v_0)+h\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)+o(h) \\ y(u_0+h,v_0) &= y(u_0,v_0)+h\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)+o(h) \\ x(u_0,v_0+k) &= x(u_0,v_0)+k\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)+o(k) \\ y(u_0+h,v_0+k) &= y(u_0,v_0)+k\frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)+o(k) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x(u_0+h,v_0+k) &= x(u_0,v_0)+h\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)+o(h) \\ &\quad + k\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)+o(k) \\ y(u_0+h,v_0) &= y(u_0,v_0)+h\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)+o(h) \\ &\quad + k\frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)+o(k)\,; \end{aligned}$$

wenn wir Terme der Größenordnung $o(h)$ und $o(k)$ vernachlässigen, ist die transformierte Menge also ein Parallelogramm mit Kantenvektoren

$$h\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad k\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0) \end{pmatrix}.$$

Der Flächeninhalt eines Parallelogramms ist bekanntlich gleich dem Produkt der Kantenlängen mal dem Sinus des eingeschlossenen Winkels; falls wir die beiden Vektoren in den $\mathbb{R}^3$ einbetten, indem wir ihnen eine Null als dritte Komponente geben, ist das gerade gleich dem Betrag des Vektorprodukts, das hier nur in der dritten Komponenten von null verschieden ist; die Fläche des Parallelogramms ist also

$$hk\cdot\left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right|.$$

Der gesamte Integrationsbereich wird approximiert durch die Vereinigung der Parallelogramme zu den sämtlichen Rechtecken, mit denen B' approximiert wurde; wenn wir also davon ausgehen, daß die Koordinatentransformation zwischen und B und B' bijektiv ist und wenn wir – was eigentlich noch durch genauere Abschätzungen zu rechtfertigen wäre – auch davon ausgehen, daß wir die oben erwähnten Fehler beim Grenzübergang $h\to 0$ und $k\to 0$ vernachlässigen können, erhalten wir die

Transformationsformel: $f\colon B\to\mathbb{R}$ sei eine integrierbare Funktion auf $B\subseteq\mathbb{R}^2$, und die Variablen x,y seien als differenzierbare Funktionen $x=x(u,v)$ und $y=y(u,v)$ neuer Variabler u,v dargestellt. Ist dann

$B' \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Integrationsbereich, für den die Abbildung

$$B' \to B; \quad (u,v) \mapsto \big(x(u,v),\, y(u,v)\big)$$

bijektiv ist, so gilt

$$\iint\limits_B f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{B'} f\big(x(u,v)\,y(u,v)\big) \left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right| du\,dv\,.$$

Für unbeschränkte Integrationsbereiche stehen hier natürlich uneigentliche Integrale; da diese – so sie existieren – Grenzwerte von üblichen Integralen sind, ist dies kein Problem.

Im Fall

$$x = r\cos\varphi \quad \text{und} \quad y = r\sin\varphi$$

der Polarkoordinaten ist

$$\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\varphi\cdot(r\cos\varphi) - (-r\sin\varphi)\cdot\sin\varphi = r\,,$$

d.h.

$$\iint\limits_B f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{B'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi.$$

Damit können wir beispielsweise noch einmal die Fläche eines Kreises ausrechnen: Die Punkte der Kreisscheibe B mit Radius R um den Nullpunkt haben Polarkoordinaten (r,φ) im Rechteck

$$B' = \big\{(r,\varphi) \bigm| 0 \le r \le R \quad \text{und} \quad 0 \le \varphi < 2\pi\big\}\,;$$

die Fläche von B ist also

$$\iint\limits_B dx\,dy = \iint\limits_{B'} r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R r\,dr\right) d\varphi = \int_0^{2\pi}\frac{R^2}{2}\,d\varphi = \pi R^2\,.$$

Im Vergleich zum letzten Abschnitt, wo wir das Integral (für $R = 1$) in kartesischen Koordinaten ausrechneten und dazu die Funktion $\sqrt{1-x^2}$ integrieren mußten, ist diese Rechnung erheblich einfacher; die Transformationsformel leistet also genau das, was wir von einer verallgemeinerten Substitutionsregel erwarten: Bei *geschickter* Substitution kann sie die Berechnung eines Integrals erheblich vereinfachen.

Als nächstes Beispiel wollen wir endlich einmal ein Integral ausrechnen, bei dem wir das Ergebnis nicht besser und viel einfacher durch elementargeometrische Überlegungen bekommen können: das Integral

$$I \underset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\,.$$

Wie in **[HM1]** erwähnt, ist die Stammfunktion von e^{-x^2} nicht in geschlossener Form durch die uns bekannten Funktionen ausdrückbar; Integration mittels Stammfunktion ist also zwecklos. Stattdessen benutzen wir folgenden Trick:

Nach dem Satz von FUBBINI, den wir durch Grenzübergang auch auf das unendliche „Rechteck“ $\mathbb{R}^2$ verallgemeinern können, ist

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\right) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right) dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\cdot I\,dy \\
&= I\cdot\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = I^2\,.
\end{aligned}$$

In Polarkoordinaten entspricht $\mathbb{R}^2$ dem Bereich $B' = \mathbb{R}_{\ge 0}\times[0,2\pi)$; also ist das betrachtete Integral nach der Transformationsformel auch gleich

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dx = \iint\limits_{B'} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\infty} re^{-r^2}\,dr\right) d\varphi\,.$$

Die Stammfunktion des neuen Integranden re^{-r^2} ist leicht zu finden: Aus

$$\frac{d}{dr}e^{-r^2} = -2re^{-r^2}$$

folgt sofort, daß
$$\int re^{-r^2}\,dr = -\tfrac{1}{2}e^{-r^2} + C\,.$$
Damit können wir weiterrechnen und erhalten das Ergebnis
$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\infty} re^{-r^2}\,dr\right)d\varphi = \int_0^{2\pi} -\tfrac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^{\infty}\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\tfrac{1}{2}\,d\varphi = \pi\,.$$
Also ist $I^2 = \pi$ und, da der Integrand von I überall positiv ist, $I = \sqrt{\pi}$.

Für die leicht allgemeinere Funktion $e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$ folgt nach der Substitutionsregel mit $x \to x/(\sqrt{2\pi}\sigma)$
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}\,dx = \sqrt{2\pi}\sigma\,;$$
damit ist also
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}\,dx = 1\,,$$
wie sich das für eine Wahrscheinlichkeitsdichte auch gehört.

Zur Verallgemeinerung der Transformationsformel auf höhere Dimensionen beachten wir zunächst, daß der Term
$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$
in der Formel
$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{B'} f\big(x(u,v)\,y(u,v)\big)\left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right|\,du\,dv$$
gerade gleich der Determinaten der JACOBI-Matrix
$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

des Koordinatenwechsels
$$(u,v) \mapsto \big(x(u,v),\, y(u,v)\big)$$
ist. Dies können wir uns auch geometrisch veranschaulichen, denn der Term, um den es hier geht, ist ja gerade der Flächeninhalt des Parallelogramms mit den Kantenvektoren
$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) \end{pmatrix} \quad\text{und}\quad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0) \end{pmatrix}.$$
Den Flächeninhalt eines Parallelogramms mit Kantenvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ können wir auch wie folgt ausrechnen:

Das (kartesische) Koordinatensystem in $\mathbb{R}^2$ sei so gewählt, daß der Vektor $\vec{a}$ ein Vielfaches $a\vec{e}_1$ des ersten Koordinateneinheitsvektors ist. Falls dann auch noch $\vec{b} = b\vec{e}_2$ ein Vielfaches des zweiten sein sollte, falls also das Parallelogramm sogar ein achsenparalleles Rechteck sein sollte, ist dessen Fläche gleich
$$ab = \det\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \det(\vec{a},\vec{b})\,.$$
Im allgemeinen wird das Parallelogramm natürlich kein Rechteck sein; da die Basisvektoren im Gegensatz zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufeinander senkrecht stehen, müssen wir $\vec{b}$ dann als Linearkombination $\vec{b} = c\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ schreiben. Dabei können wir $b\vec{e}_2$ als Projektion von $\vec{b}$ auf die von $\vec{e}_2$ aufgespannte Koordinatenachse auffassen. Da sich das Parallelogramm durch Scherung in das Rechteck mit Kantenvektoren $\vec{a}$ und $b\vec{e}_2$ überführen läßt und sich der Flächeninhalte bei Scherungen nicht ändern, hat das Parallelogramm immer noch den Flächeninhalt
$$ab = \det\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} = \det(\vec{a},\vec{b})\,.$$
Beim Übergang zu einem anderen orthonormalen Koordinatensystem werden die Koordinatenachsen gedreht, d.h. sie werden mit einer Matrix der Form
$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

multipliziert. Da deren Determinante gleich eins ist, ändert sich dabei nach dem Multiplikationssatz für Determinanten nichts am Wert von $\det(\vec{a}, \vec{b})$. Der Flächeninhalt eines von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms ist also stets gleich $\det(\vec{a}, \vec{b})$, egal bezüglich welcher Orthonormalbasis die Kantenvektoren dargestellt werden.

Genauso können wir auch in höheren Dimensionen argumentieren: Durch mehrfache Scherung läßt sich ein beliebiges Parallelepiped in einen Quader überführen; das Volumen des von n Kantenvektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ aufgespannten Parallelepipeds ist also gleich

$$\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)\,.$$

(Für $n = 3$ kennen wir diese Formel bereits, denn wir wissen, daß dort das Volumen gleich dem Spatprodukt $(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \vec{a}_3$ der drei Vektoren ist, und dieses wiederum ist gleich der Determinanten.)

Damit gilt also im $\mathbb{R}^n$ die

Transformationsformel: $f\colon B \to \mathbb{R}$ sei eine integrierbare Funktion auf $B \subseteq \mathbb{R}^n$, und die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ seien als differenzierbare Funktionen

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(u_1, \ldots, u_n) \\ &\vdots \\ x_n &= x_n(u_1, \ldots, u_n) \end{aligned}$$

neuer Variabler $u_1, \ldots, u_n$ dargestellt. Ist dann $B' \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Integrationsbereich, für den die Abbildung

$$B' \to B; \quad \mathbf{u} \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{u})$$

bijektiv ist, so gilt

$$\int \underset{B}{\cdots} \int f(\mathbf{x})\, dx_1 \cdots dx_n = \int \underset{B'}{\cdots} \int f\big(\mathbf{x}(\mathbf{u})\big)\, |\det J_{\mathbf{x}}(\mathbf{u})|\, du_1 \cdots du_n\,.$$

■

Ausgeschrieben wird die Formel für den $\mathbb{R}^3$, wenn wir kurz

$$F(u, v, w) \underset{\text{def}}{=} f\big(x(u, v, w),\ y(u, v, w),\ z(u, v, w)\big)$$

schreiben, zu

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$\iiint_{B'} F(u, v, w) \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} \right| du\, dv\, dw\,.$$

Als Beispiel können wir wieder Koordinatensysteme betrachten: Für Kugelkoordinaten ist

$$\begin{aligned} x &= r \cos\varphi \sin\vartheta \\ y &= r \sin\varphi \sin\vartheta\ , \\ z &= r \cos\vartheta \end{aligned}$$

die JACOBI-Matrix ist also

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\vartheta & -r \sin\varphi \sin\vartheta & r \cos\varphi \cos\vartheta \\ \sin\varphi \sin\vartheta & r \cos\varphi \sin\vartheta & r \sin\varphi \cos\vartheta \\ \cos\vartheta & 0 & -r \sin\vartheta \end{pmatrix}.$$

Entwicklung nach der dritten Zeile ergibt für die Determinante den Wert

$$\begin{aligned} &\cos\vartheta \begin{vmatrix} -r \sin\varphi \sin\vartheta & r \cos\varphi \cos\vartheta \\ r \cos\varphi \sin\vartheta & r \sin\varphi \cos\vartheta \end{vmatrix} \\ &- r \sin\vartheta \begin{vmatrix} \cos\varphi \sin\vartheta & -r \sin\varphi \sin\vartheta \\ \sin\varphi \sin\vartheta & r \cos\varphi \sin\vartheta \end{vmatrix} \\ &= -r^2 \cos\vartheta (\sin\theta \cos\theta) - r^2 \sin\vartheta \cdot \sin^2\vartheta = -r^2 \sin\theta\,. \end{aligned}$$

Der Betrag der Determinanten der JACOBI-Matrix ist also

$$r^2\, |\sin\vartheta|\,,$$

und mit

$$F(r, \varphi, \vartheta) = f(r \cos\varphi \sin\vartheta,\ r \sin\varphi \sin\vartheta,\ r \cos\vartheta)$$

wird die Transformationsformel zu

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{B'} F(r,\varphi,\vartheta)\cdot r^2\,|\sin\vartheta|\;dr\,d\varphi\,d\vartheta\,.$$

Berechnen wir zur Kontrolle schnell noch einmal das Volumen der Kugel B um den Nullpunkt mit Radius R:

$$\iiint\limits_B dx\,dy\,dz = \int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_0^R r^2\,|\sin\vartheta|\;dr\,d\varphi\,d\vartheta$$
$$= \int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{R^3}{3}\,|\sin\vartheta|\;d\varphi\,d\vartheta = \frac{2\pi R^3}{3}\int_0^\pi \sin\vartheta\,d\vartheta = \frac{4\pi R^3}{3}\,.$$

Außer den Kugelkoordinaten hatten wir im $\mathbb{R}^3$ auch noch Zylinderkoordinaten betrachtet; für diese ist

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi \qquad \text{und}$$
$$z = z\,,$$

also

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,,$$

und die Determinante davon ist wie bei den ebenen Polarkoordinaten gleich r. Also haben wir hier im wesentlichen dieselbe Transformationsformel wie bei den ebenen Polarkoordinaten (Zylinderkoordinaten sind schließlich im wesentlichen auch nichts anderes als ebene Polarkoordinaten), nämlich

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{B'} F(r,\varphi,z)\cdot r\,dr\,d\varphi\,dz\,,$$

wobei wieder

$$F(r,\varphi,z) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$$

sein soll.

Genauso lassen sich auch beliebige andere Koordinatensysteme behandeln, beispielsweise könnte man zum Rechnen mit einem Ellipsoid auch Ellipsoidkoordinaten

$$x = a\cos\varphi\sin\vartheta$$
$$y = b\sin\varphi\sin\vartheta$$
$$z = c\cos\vartheta$$

einführen und damit das Volumen des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$$

bestimmen. (Die Antwort ist natürlich *(?)* $\frac{4}{3}\pi abc$.)

In Physik und Technik sind noch zahlreiche weitere bewährte Koordinatensysteme im Einsatz, auf die wir hier nicht eingehen können; dank der obigen Transformationsformel kann man immer das benutzen, das der jeweiligen Situation am besten angepaßt ist und mithin am wenigsten Rechnung verlangt.

d) Der Satz von Green und der ebene Satz von Gauß

$B \subset \mathbb{R}^2$ sei ein Bereich, dessen Rand aus endlich vielen Kurvenstücken bestehe. Dann können wir sowohl über B als auch über dessen Randkurve ∂B integrieren; die beiden Sätze in diesem Abschnitt befassen sich mit der Beziehung zwischen diesen beiden Integrationen.

Im allgemeinen kann man natürlich nicht viel erwarten: Nimmt man aus B eine Kurve γ heraus, ist es bei der Integration einer stetigen Funktion gleichgültig, ob man über B oder über $B \setminus \gamma$ integriert, das Randintegral ändert sich aber um das im allgemeinen nicht verschwindende Kurvenintegral über γ.

Für eine geschlossene Kurve γ dagegen erwarten wir, wenn wir uns von der Anschauung leiten lassen und uns die Kurve als eine Art deformierten

Kreis vorstellen, daß sie die Ebene in zwei Bereiche zerlegt: einen beschränkten Bereich B und einen unbeschränkten Bereich B'. Hier sollten sich γ und B gegenseitig so stark beeinflussen, daß eigentlich auch die Integration über B etwas mit der Integration über γ zu tun haben müßte.

Nun ist es natürlich etwas gefährlich, sich *nur* von der Anschauung leiten zu lassen, denn es gibt sicherlich erheblich mehr Kurven, als man sich gemeinhin vorstellt. Beispielsweise gibt es auch Kurven, die wie eine Ziffer 8 aussehen, etwa die Lemniskate, und diese zerlegen die Ebene in *drei* Bereiche. Wir müssen also noch zusätzlich fordern, daß sich die Kurve nicht selbst überkreuzt, aber dann gilt in der Tat

Jordanscher Kurvensatz: γ sei eine geschlossene ebene Kurve ohne Überkreuzungen. Dann hat $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \gamma$ zwei Zusammenhangskomponenten, von denen die eine beschränkt und die andere unbeschränkt ist.

(Der französische Mathematiker MARIE ENNEMOND CAMILLE JORDAN (1838–1922) war zu seiner Zeit vor allem berühmt für seine Arbeiten zur Algebra, z.B. über Permutationsgruppen, Matrizen und Determinanten; er war aber auch einer der ersten, der algebraische Methoden in der Topologie einführte und damit beispielsweise den gerade zitierten Satz bewies.)

Der Beweis dieses anschaulich fast selbstverständlichen Satzes erfordert einen erstaunlich großen Aufwand: Man muß die Ebene in kleine Quadrate (oder Dreiecke oder etwas ähnliches) unterteilen, γ durch Kantenzüge aus deren Seiten annähern, den Satz durch aufwendige Rechnungen mit formalen Summen von Quadraten und Quadratseiten für die angenäherten Kurven beweisen und dann schließlich noch durch ein Limesargument zeigen, daß die Aussage auch für γ selbst gilt. Die genaue Durchführung dieses Beweises würde etwa drei Vorlesungstermine erfordern – ein Aufwand, der für uns in keinem vernünftigen Zusammenhang mit seinem Nutzen steht: Bei den meisten in der Praxis vorkommenden Kurven wird die Aussage des JORDANschen Kurvensatzes zumindest für diese speziellen Kurven ohnehin klar sein.

Um den JORDANschen Kurvensatz zu umgehen, starten wir einfach mit einem Bereich $B \subset \mathbb{R}^2$, von dem wir all das verlangen, was uns nacher das Leben einfach macht; in der Praxis sollte es (hoffentlich) selten schwierig sein, diese Forderungen für die Bereiche aus konkreten Anwendungen zu verifizieren.

Satz von Green: $B \subset \mathbb{R}^2$ sei eine abgeschlossene Menge, die sowohl als Vereinigung endlich vieler Normalbereiche vom Typ I wie auch als Vereinigung endlich vieler Normalbereiche vom Typ II geschrieben werden kann; ihre Randkurve γ sei so orientiert, daß B im Gegenuhrzeigersinn umlaufen wird. Weiter sei $\vec{V} \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^2)$ ein differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $D \supset B$ von $\mathbb{R}^2$. Dann ist

$$\int_\gamma \vec{V}\, ds = \iint_B \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right) dx\, dy\,.$$

Beweis: Wir betrachten zunächst nur Vektorfelder $\vec{V} = \binom{V_1}{0}$ mit verschwindender y-Komponente. Nach Voraussetzung läßt sich B als Vereinigung endlich vieler Normalbereiche vom Typ I schreiben; einer davon sei

$$N = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \le x \le b \quad \text{und} \quad f(x) \le y \le g(x)\right\}.$$

Für diesen ist

$$\iint_N \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint_N -\frac{\partial V_1}{\partial y}\, dx\, dy$$

$$= -\int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial V_1}{\partial y}\, dy\right) dx = \int_a^b \big(V_1\big(x, g(x)\big) - V_1\big(x, f(x)\big)\, dx\,.$$

Das Integral über die Randkurve γ berechnen wir am besten komponentenweise:

$$\gamma_1\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto \big(t, f(t)\big)$$

sei die untere Begrenzungskurve,

$$\gamma_2\colon \big[f(a), g(a)\big] \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto (b, t)$$

die rechte Randstrecke,

$$\gamma_3\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto \big(b + a - t, f(b + a - t)\big)$$

die (wegen des Gegenuhrzeigersinns) rückwärts durchlaufene obere Begrenzungskurve, und

$$\gamma_4\colon \big[f(a), g(a)\big] \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto \big(a, f(a)+g(a)-t\big)$$

schließlich die von oben nach unten durchlaufene linke Seitenstrecke.

Dann ist $\dot\gamma(t) = \binom{1}{f'(t)}$, also

$$\int_{\gamma_1} \vec V\, ds = \int_a^b \begin{pmatrix} V_1\big(t,f(t)\big) \\ V_2\big(t,f(t)\big)\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t)\end{pmatrix} dt = \int_a^b V_2\big(t,f(t)\big)\, dt$$

und entsprechend, da sich bei Umkehr des Integrationswegs einfach das Vorzeichen des Integrals ändert,

$$\int_{\gamma_3} \vec V\, ds = -\int_a^b \begin{pmatrix} V_1\big(t,g(t)\big) \\ V_2\big(t,g(t)\big)\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t)\end{pmatrix} dt = -\int_a^b V_2\big(t,g(t)\big)\, dt\,.$$

Für die beiden Seitenstrecken ist $\dot\gamma_2(t) = \binom{0}{1}$ und $\dot\gamma_4(t) = \binom{0}{-1}$, also ist

$$\int_{\gamma_2} \vec V\, ds = \int_{f(a)}^{g(a)} \begin{pmatrix} V_1(a,t) \\ 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1\end{pmatrix} dt = 0\,,$$

und genauso folgt auch das Verschwinden des Integrals über γ_4.

Aufsummieren der vier Teilintegrale zeigt, daß die Summe gerade gleich dem oben ausgerechneten Wert des Flächenintegrals von $\vec V$ über N ist, zumindest für N und dieses spezielle Vektorfeld ist der Satz also richtig.

Damit gilt er aber zumindest für dieses spezielle Vektorfeld auch für jeden Bereich B, der den Voraussetzungen des Satzes genügt: Das Flächenintegral über B ist gleich der Summe der Flächenintegrale über die Normalbereiche vom Typ I, in die wir B zerlegt haben und somit problemlos. Die Randkurve von B besteht einerseits aus den Kurvenstücken γ_1 und γ_3 zu den einzelnen Normalbereichen, andererseits eventuell noch aus einigen Teilen von Randstrecken γ_2 oder γ_4. Da die Kurvenintegrale über die letzteren verschwinden (hier verschwindet sogar der Integrand identisch) und die über die ersteren gleich dem

Flächenintegral über den Normalbereich sind, folgt die Behauptung, wenn auch natürlich nur für die hier betrachteten Vektorfelder, deren zweite Komponente identisch verschwindet.

Man überlegt sich nun leicht, daß der Satz auch für Vektorfelder, deren *erste* Komponente identisch verschwindet richtig ist: Wenn man die Normalbereiche vom Typ I durch solche vom Typ II ersetzt, kann man die obige Argumentation fast wörtlich übernehmen.

Der Rest des Beweises ist nun einfach: Ein beliebiges Vektorfeld $\vec V$ läßt sich als Summe

$$\vec V(x,y) = \begin{pmatrix} V_1(x,y) \\ V_2(x,y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1(x,y) \\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ V_2(x,y)\end{pmatrix}$$

schreiben, wobei der Satz für beide Summanden gilt. Da beide Seiten der behaupteten Gleichung linear in $\vec V$ sind, folgt die Behauptung dann auch für $\vec V$ selbst.

■

Wenn wir für $\vec V$ speziell ein Vektorfeld der Form

$$\vec V(x,y) = \begin{pmatrix} -\Phi_y(x,y) \\ \Phi_x(x,y)\end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \Phi \in \mathcal{C}^2(D,\mathbb{R})$$

einsetzen, erhalten wir für das Flächenintegral

$$\iint_B \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right) dxdy = \iint_B (\Phi_{xx} + \Phi_{yy})\, dx\, dy = \iint_B \Delta\Phi\, dx\, dy\,,$$

wobei Δ wie üblich den LAPLACE-Operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

bezeichnet.

Das Integral über die Randkurve $\gamma = \binom{\gamma_1}{\gamma_2}$ wird zu

$$\int_\gamma \begin{pmatrix} -\Phi_y(\gamma(t)) \\ \Phi_x(\gamma(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot\gamma_1(t) \\ \dot\gamma_2(t) \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_\gamma \Big(-\Phi_y(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma_1(t) + \Phi_x(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma_2(t) \Big) \, dt$$

$$= \int_\gamma \begin{pmatrix} \Phi_x(\gamma(t)) \\ \Phi_y(\gamma(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot\gamma_2(t) \\ -\dot\gamma_1(t) \end{pmatrix} dt \, .$$

Der erste Vektor im Integranden der dritten Zeile ist einfach der Gradient von Φ. Der zweite Vektor hat Skalarprodukt null mit dem Tangentenvektor $\dot\gamma(t) = \binom{\dot\gamma_1(t)}{\dot\gamma_2(t)}$, steht also auf diesem senkrecht und ist somit ein *Normalenvektor*. Das Skalarprodukt des Gradienten einer Funktion mit einem Vektor ist bekanntlich die *Richtungsableitung* der Funktion in Richtung dieses Vektors; mit

$$\vec n = \begin{pmatrix} \dot\gamma_2(t) \\ -\dot\gamma_1(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \partial_{\vec n} = \vec n \cdot \operatorname{grad}$$

erhalten wir somit

Satz von Gauß (ebener Fall)**:** Für B, D und γ wie im Satz von GREEN und $\Phi \in \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R}^2)$ gilt

$$\iint_B \Delta\Phi \, dx \, dy = \int_\gamma \partial_{\vec n}\Phi \, ds \, .$$

■

Mit einer Verallgemeinerung sowie auch mit der anschaulichen Interpretation dieses Satzes werden wir uns in den Abschnitten *f)* und *g)* noch genauer befassen: In *f)* werden wir diesen Satz auch für den dreidimensionalen Raum beweisen, und in *g)* geht es um Anwendungen sowohl des ebenen wie auch des dreidimensionalen Falls.

e) Oberflächenintegrale

Im dreidimensionalen Fall wird der Satz von GAUSS, wie die meisten wohl bereits aus der Physik wissen, ein Volumenintegral mit dem Fluß durch eine Oberfläche in Verbindung bringen. Was Volumenintegrale sind, haben wir inzwischen auch hier definiert; in diesem Abschnitt geht es um den Begriff des Oberflächenintegrals, um den Fluß eines Vektorfelds durch eine Oberfläche und um verwandte Themen.

Die Vorgehensweise bei der Definition eines Oberflächenintegrals entspricht genau der bei der Definition des Kurvenintegrals: Dort hatten wir Kurvenstücke als Funktionen $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ definiert; hier definieren wir entsprechend *Flächenstücke* durch Funktionen zweier Parameter. Wir müssen dabei allerdings etwas sorgfältiger vorgehen, denn im Vergleich zum Kurvenfall ist die Situation zumindest in zweierlei Hinsicht komplexer: Erstens gibt es auf der reellen Geraden im wesentlichen nur eine Art von zusammenhängenden Teilmengen, nämlich die Intervalle. In der Ebenen gibt es erheblich mehr Möglichkeiten – aber damit hatten wir uns ja schon bei der Definition von Flächen- und Volumenintegralen beschäftigt. Zweitens mußten wir bei Kurven nur fordern, daß $\dot\gamma(t)$ nirgends verschwindet, um die Existenz eines Tangentenvektors zu garantieren. Hier im zweidimensionalen recht das nicht mehr: Ein Flächenstück hat in jedem Punkt Anspruch nicht nur auf eine Tangente, sondern auf eine ganze *Tangentialebene;* wir müssen also sicherstellen, daß es in jedem Punkt mindestens zwei linear unabhängige Tangentenvektoren gibt.

Die dazu notwendigen Definitionen kann man problemlos für Flächenstücke in jedem $\mathbb{R}^n$ hinschreiben; wir wollen uns aber, da dies für alle hier betrachteten Anwendungen ausreicht, auf den etwas anschaulicheren Fall von Flächenstücken im $\mathbb{R}^3$ beschränken.

Ein Flächenstück soll demnach gegeben sein durch eine Funktion

$$f\colon B \to \mathbb{R}^3; \quad (u,v) \mapsto f(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$$

auf einer Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^2$; mit Blick auf unsere Erfahrungen bei Kurvenstücken wollen wir von vornherein fordern, daß f differenzierbar sein soll in einer offenen Umgebung von B. Für kleine reelle Zahlen h, k ist dann für einen Punkt $(u_0, v_0) \in B$

$$f(u_0+h, v_0+k) = f(u_0, v_0)+f_u(u_0, v_0)\cdot h+f_v(u_0, v_0)\cdot k+o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right).$$

Da hier nur h und k variabel sind, bedeutet die Forderung nach zwei linear unabhängigen Tangentialvektoren, daß die beiden Vektoren $f_u(u_0, v_0)$ und $f_v(u_0, v_0)$ in allen Punkten $(u_0, v_0) \in B$ linear unabhängig sein müssen.

An dieser Stelle führt die Beschränkung auf den $\mathbb{R}^3$ zu einer kleinen Vereinfachung: Im $\mathbb{R}^3$, und nur dort, existiert ein Vektorprodukt; zwei Vektoren sind genau dann linear unabhängig, wenn dieses Vektorprodukt ungleich dem Nullvektor ist. Sowohl der Betrag als auch die Richtung dieses Vektors werden uns schon bald in mehrfacher Hinsicht nützlich sein; wir definieren daher

Definition: Ein reguläres Flächenstück im $\mathbb{R}^3$ ist gegeben durch einen Bereich $B \subset \mathbb{R}^2$ und eine in einer offenen Menge $D \supseteq B$ differenzierbaren Funktion $f: D \to \mathbb{R}^3$; $(u, v) \mapsto f(u, v)$, für die gilt:
1.) Die Einschränkung $f_{|B}$ von f auf B ist injektiv.
2.) In jedem Punkt $(u_0, v_0) \in B$ ist $f_u(u_0, v_0) \times f_v(u_0, v_0) \neq \vec{0}$.

Die wichtigste Oberfläche, mit der wir es im folgenden zu tun haben werden, ist die der Kugel. Die Oberfläche einer Kugel vom Radius R hat in Kugelkoordinaten die Gleichung $r = R$ mit beliebigen Winkelkoordinaten φ und ϑ, sie ist also (in kartesischen Kordinaten) gegeben durch die Funktion

$$f: [0, 2\pi) \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3; \quad (\varphi, \vartheta) \mapsto \begin{pmatrix} R\cos\varphi\sin\vartheta \\ R\sin\varphi\sin\vartheta \\ R\cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Die Differenzierbarkeit ist hier überhaupt kein Problem: Die angegebene Funktion ist sogar auf ganz $\mathbb{R}^2$ beliebig oft stetig differenzierbar.

Bei der Injektivität gibt es allerdings Probleme: Für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ ist $\sin\vartheta = 0$; daher werden alle Parameterpaare $(\varphi, 0)$ auf $(0, 0, R)$ und aller Parameterpaare (φ, π) auf $(0, 0, -R)$ abgebildet.

Das ist aber glücklicherweise auch bereits alles was passieren kann, denn falls $\sin\vartheta \neq 0$ ist, können wir aus der dritten Komponenten $R\cos\vartheta$ den Winkel $\theta \in [0, \pi]$ eindeutig bestimmen; dann kennen wir auch $R\sin\vartheta$ und bekommen somit aus den ersten beiden Komponenten von f den Cosinus und den Sinus von φ, wodurch $\varphi \in [0, 2\pi)$ eindeutig festgelegt ist.

Die partiellen Ableitungen von f sind

$$f_\varphi = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi\sin\vartheta \\ R\cos\varphi\sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f_\vartheta = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos\vartheta \\ R\sin\varphi\cos\vartheta \\ -R\sin\vartheta \end{pmatrix},$$

also ist

$$f_\varphi \times f_\vartheta = \begin{pmatrix} R^2\cos\varphi\sin^2\vartheta \\ R^2\sin\varphi\sin^2\vartheta \\ R^2\sin\vartheta\cos\vartheta \end{pmatrix} = R\sin\vartheta\cdot f(\varphi, \vartheta).$$

Da für eine echte Kugel $R > 0$ sein muß und der Nullpunkt damit nicht auf der Kugeloberfläche liegt, ist dieser Vektor genau dann gleich dem Nullvektor, wenn $\sin\vartheta = 0$ ist; wie bei der Injektivität gibt es also wieder Probleme an den Polen, aber auch nur dort.

Somit können wir die Kugel nur dann als reguläres Flächenstück auffassen, wenn wir die beiden Pole herausnehmen, d.h. wenn wir uns auf den Parameterbereich $[0, 2\pi) \times (0, \pi)$ beschränken.

Für die meisten praktischen Zwecke ist das natürlich völlig unproblematisch: Bei der Flächenbestimmung oder allgemeiner der Integration einer beschränkte Funktion sind einzelne, isoliert liegende Punkte irrelevant. Lediglich im Falle von uneigentlichen Integranden muß man hier sehr vorsichtig sein; hier in dieser Vorlesung sollen solche Integrale deshalb vorsichtshalber gleich gar nicht erst definiert werden.

Nachdem wir nun wissen, was ein reguläres Flächenstück ist, müssen wir als nächstes lernen, damit zu rechnen. Bevor wir uns an die Bestimmung von Flächeninhalten machen, ist es vielleicht ganz nützlich (wenn auch nicht unbedingt notwendig), daß wir uns ein paar Gedanken über die *Längenmessung* machen.

Längen sind Eigenschaften von Kurven; wir müssen also eine Kurve oder – da wir Längen auch stückweise aneinandersetzen können – einfacher ein Kurvenstück auf einem Flächenstück betrachten. Genau wie man etwa bei der Navigation auf der Erde nicht von einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem ausgeht, sondern von der geographischen Länge und Breite, empfiehlt es sich auch hier, Kurven über die Parameter des Flächenstücks zu definieren – und sei es auch nur, um sicher zu sein, daß die Kurve auch wirklich auf dem Flächenstück liegt.

Wir beschreiben eine Kurve auf einem Flächenstück $f\colon B \to \mathbb{R}^3$ daher durch eine Funktion

$$\delta\colon [a,b] \to B; \quad t \mapsto \big(u(t), v(t)\big) ;$$

die eigentliche Kurve im $\mathbb{R}^3$ wird dann beschrieben durch die zusammengesetzte Abbildung

$$\gamma = f \circ \delta\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3; \quad t \mapsto f\big(u(t), v(t)\big) .$$

Wir wollen natürlich, daß diese Kurve immer dieselbe Länge hat, egal ob wir sie einfach so im $\mathbb{R}^3$ oder auf einem Flächenstück betrachten. Die Länge des Kurvenstücks γ auf dem Flächenstück f ist daher gleich der bekannten Länge des Kurvenstücks γ im $\mathbb{R}^3$, also

$$\int_a^b |\dot\gamma(t)|\, dt = \int_a^b \left| f_u\big(u(t), v(t)\big)\frac{du}{dt} + f_v\big(u(t), v(t)\big)\frac{dv}{dt} \right| dt .$$

Der Betrag des Vektors $f_u\big(u(t), v(t)\big)\frac{du}{dt} + f_v\big(u(t), v(t)\big)\frac{dv}{dt}$ ist gleich der Wurzel aus dem Skalarprodukt des Vektors mit sich selbst, also der Wurzel aus

$$\begin{aligned} &f_u\big(u(t), v(t)\big)^2 \left(\frac{du}{dt}(t)\right)^2 \\ &+ 2 f_u\big(u(t), v(t)\big) \cdot f_v\big(u(t), v(t)\big) \left(\frac{du}{dt}(t)\right)\left(\frac{dv}{dt}(t)\right) \\ &+ f_v\big(u(t), v(t)\big)^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 . \end{aligned}$$

In dieser Formel können wir zwei Arten von Termen unterscheiden: Rechts stehen jeweils die Ableitungen von u und v nach t; diese hängen nur von der jeweiligenen Kurve ab, die ja gerade durch die Funktionen $u(t)$ und $v(t)$ definiert ist. Links dagegen stehen Ausdrücke in den partiellen Ableitungen von f nach u und v; diese sind Funktionen auf dem Flächenstück und sind insbesondere unabhängig von jeder Kurve. Wir bezeichnen daher diese drei letzteren Größen

$$\begin{aligned} E(u,v) &= f_u(u,v) \cdot f_u(u,v) , \\ F(u,v) &= f_u(u,v) \cdot f_v(u,v) \quad \text{und} \\ G(u,v) &= f_v(u,v) \cdot f_v(u,v) \end{aligned}$$

als *Fundamentalgrößen* des Flächenstücks f.

Um etwas Übung im Umgang mit diesen Größen zu bekommen, wollen wir sie für die Kugeloberfläche in ihrer oben angegebenen Parametrisierung berechnen. Hier ist, wie wir schon wissen,

$$f_\varphi = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi\sin\vartheta \\ R\cos\varphi\sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f_\vartheta = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos\vartheta \\ R\sin\varphi\cos\vartheta \\ -R\sin\vartheta \end{pmatrix} ;$$

also ist

$$\begin{aligned} E(\varphi,\vartheta) &= R^2(\sin^2\varphi\sin^2\vartheta + \cos^2\varphi\sin^2\vartheta) = R^2\sin^2\vartheta \\ F(\varphi,\vartheta) &= R^2(-\sin\varphi\sin\vartheta\cos\varphi\cos\vartheta + \cos\varphi\sin\vartheta\sin\varphi\cos\vartheta) = 0 \\ G(\varphi,\vartheta) &= R^2(\cos^2\varphi\cos^2\vartheta + \sin^2\varphi\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) = R^2 . \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis sollte man auch geometrisch interpretieren: Das Verschwinden von F, die Orthogonalität von f_φ und f_ϑ also, bedeutet, daß die Längenkreise und die Breitenkreise in jedem Punkt der Kugel (außer den beiden Polen) aufeinander senkrecht stehen; die Konstans von G kommt daher, daß alle Längenkreise gleich lang sind, und die ϑ-Abhängigkeit von E schließlich reflektiert die Tatsache, daß Breitenkreise verschiedener Breite verschiedene Radien haben.

Allgemein kann man die Länge einer Kurve auf einem Flächenstück somit als Integral

$$\int_a^b \sqrt{E\,\dot{u}^2 + 2F\,\dot{u}\dot{v} + G\,\dot{v}^2}\,dt$$

berechnen; dem interessierten Leser sei empfohlen, damit beispielsweise überprüfen, daß Breitenkreise i.a. nicht die kürzeste Verbindung zwischen zweien ihrer Punkte sind, sondern daß der Kreis um den Kugelmittelpunkt durch diese beiden Punkte (der sogenannte Großkreis) eine kürzere Verbindungskurve liefert.

Unser Hauptziel hier sind allerdings nicht Längenberechnungen, sondern die Berechnung von Oberflächen *bzw.* von Flüssen von Vektorfeldern durch diese Oberflächen. Dabei gehen wir genauso vor, wie bei der Transformationsformel im vorigen Abschnitt: Wir unterteilen den Parameterbereich B durch Rechtecke, und betrachten deren Bilder auf dem Flächenstück. Diese sind, da wir f als differenzierbar vorausgesetzt haben, in erster Näherung Parallelogramme, wobei die Näherung bei zunehmender Verfeinerung des Rechteckgitters auf B immer besser wird. Der Flächeninhalt eines solchen Parallelogramms mit Kantenvektoren $f_u \cdot h$ und $f_v \cdot k$ ist

$$hk \cdot |f_u \times f_v| \;,$$

also sollte die Fläche des Flächenstücks gleich

$$\iint_B |f_u \times f_v|\;du\,dv$$

sein, und genau das definieren wir auch als den Flächeninhalt eines Flächenstücks.

Definition: Der Flächeninhalt eines Flächenstücks $f\colon B \to \mathbb{R}^3$ ist

$$\iint_f dO \underset{\text{def}}{=} \iint_B |f_u \times f_v|\;du\,dv\,.$$

(Das O in dO soll dabei an Oberfläche erinnern.)

Zur Kontrolle, ob diese Definition sinnvoll sein kann, berechnen wir die Oberfläche der Kugel: Hier ist, wie wir bereits ausgerechnet haben,

$$f_\varphi \times f_\vartheta = \begin{pmatrix} R^2 \cos\varphi \sin^2\vartheta \\ R^2 \sin\varphi \sin^2\vartheta \\ R^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \end{pmatrix} = R\sin\vartheta \cdot f(\varphi,\vartheta)\,;$$

die Länge dieses Vektors ist also, da $f(\varphi,\vartheta)$ als Radiusvektor natürlich die Länge R haben muß, gleich $R^2 \sin\vartheta$. Die Oberfläche der Kugel berechnet sich daher zu

$$\begin{aligned} \iint_B R^2 \sin\vartheta &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} R^2 \sin\vartheta\,d\vartheta \right) d\varphi \\ &= 2\pi \cdot \mathbb{R}^2 \cdot (-\cos\pi + \cos 0) = 4\pi R^2\,, \end{aligned}$$

womit wir uns wieder einmal in hundertprozentiger Übereinstimmung mit der Schulmathematik befinden.

Genau wie Kurvenintegrale sind auch Oberflächenintegrale unabhängig von der Parametrisierung des Flächenstücks:

Lemma: $f\colon B \to \mathbb{R}^3$ und $g\colon B' \to \mathbb{R}^3$ seien zwei Flächenstücke, für die es eine in einer Umgebung von B stetig differenzierbare Funktion φ gebe, die B bijektiv auf B' abbildet derart, daß $g = f \circ \varphi$ ist. Dann ist

$$\iint_f du\,dv = \iint_g du\,dv\,.$$

Beweis: Nach Definition ist

$$\iint_f dO = \iint_B |f_u \times f_v|\;du\,dv \quad \text{und} \quad \iint_g dO = \iint_B |g_u \times g_v|\;du\,dv\,.$$

Wenn wir die drei Komponenten von f *bzw.* g mit $f^{(x)}, f^{(y)}, f^{(z)}$ *bzw.*

$g^{(x)}, g^{(y)}, g^{(z)}$ bezeichnen, ist

$$f_u \times f_v = \begin{pmatrix} f_u^{(y)} f_v^{(z)} - f_u^{(z)} f_v^{(y)} \\ f_u^{(z)} f_v^{(x)} - f_u^{(x)} f_v^{(z)} \\ f_u^{(x)} f_v^{(y)} - f_u^{(y)} f_v^{(x)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} f_u^{(y)} & f_v^{(y)} \\ f_u^{(z)} & f_v^{(z)} \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} f_u^{(z)} & f_v^{(z)} \\ f_u^{(x)} & f_v^{(x)} \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} f_u^{(x)} & f_v^{(x)} \\ f_u^{(y)} & f_v^{(y)} \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

und genau entsprechend natürlich auch für g. Die links stehenden Determinanten sind offensichtlich gerade die Determinaten der JACOBI-Matrizen der verschiedenen zweidimensionalen Projektionen von f; an der ersten Stelle etwa die der Funktion

$$f^{(yz)} \underset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} f^{(y)} \\ f^{(z)} \end{pmatrix} : B \to \mathbb{R}^2 .$$

Analog dazu definieren wir auch Funktionen $f^{(zx)}, f^{(xy)}$ und die entsprechenden Funktionen für g.

Aus $g = f \circ \varphi$ folgt, daß auch $g^{(x)} = f^{(x)} \circ \varphi$ und entsprechend für die anderen Komponenten. Damit ist auch $f^{(yz)} = g^{(yz)} \circ \varphi$ *usw.*

Nach der zweidimensionalen Kettenregel ist dann

$$J_{g^{(yz)}} = \left(J_{f^{(yz)}} \circ \varphi\right) \cdot J_\varphi ,$$

also ausgeschrieben

$$\begin{pmatrix} g_u^{(y)} & g_v^{(y)} \\ g_u^{(z)} & g_v^{(z)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_u^{(y)} \circ \varphi & f_v^{(y)} \circ \varphi \\ f_u^{(z)} \circ \varphi & f_v^{(z)} \circ \varphi \end{pmatrix} \cdot J_\varphi .$$

Entsprechendes gilt auch für die anderen Indexkombinationen, und nach dem Multiplikationssatz für Determinanten gilt eine entsprechende Produktbeziehung auch für die Determinaten der hier stehenden Matrizen; insgesamt erhalten wir also, daß

$$g_u \times g_v = \left((f_u \circ \varphi) \times (f_v \circ \varphi)\right) \cdot \det J_\varphi$$

ist und dementsprechend

$$|g_u \times g_v| = \left((f_u \circ \varphi) \times (f_v \circ \varphi)\right) \cdot \left|\det J_\varphi\right| .$$

Damit folgt die Behauptung aus der Transformationsformel. ■

Die Berechnung von Vektorprodukten ist etwas umständlich und sehr anfällig für Vorzeichenfehler; wir wollen daher sehen, daß die Fundamentalgrößen einer Fläche ihrem Namen gerecht werden und uns auch diese Berechnung abnehmen können: Der Flächeninhalt eines Parallelogramms mit Kantenvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist gleich dem Produkt der Längen der beiden Vektoren mal dem Sinus des eingeschlossenen Winkels α. Das Quadrat des Flächeninhalts ist also

$$\begin{aligned} &(\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b})\sin^2\alpha = (\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b})(1-\cos^2\alpha) \\ &= (\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b}) - (\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b})\cos^2\alpha = (\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b}) - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 , \end{aligned}$$

und der Flächeninhalt selbst somit

$$\sqrt{(\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b}) - (\vec{a}\cdot\vec{b})} .$$

Wir interessieren uns für das Parallelogramm mit Kantenvektoren $h \cdot f_u$ und $k \cdot f_v$; hier wird diese Formel zu

$$hk \cdot \sqrt{(f_u \cdot f_u)(f_v \cdot f_v) - (f_u \cdot f_v)^2} = hk\sqrt{EG - F^2} .$$

Die Fläche eines Flächenstücks kann also auch berechnet werden als

$$\iint_B \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv .$$

Im konkreten Fall steht hier natürlich genau dasselbe Integral wie bei der Formel mit dem Betrag des Vektorprodukts, allerdings erfordert diese Formel, sofern man die Fundamentalgrößen einer Fläche bereits kennt, deutlich weniger Rechenaufwand. Dem Leser sei empfohlen, sich am Beispiel der Kugeloberfläche hiervon zu überzeugen!

Obwohl wir uns auf Flächen im $\mathbb{R}^3$ beschränken wollen, sei hier zumindest kurz darauf hingewiesen, daß wir bei der Herleitung dieser neuen Darstellung des Flächeninhalts nirgends benutzen mußten, daß wir im $\mathbb{R}^3$ sind; diese Formel gilt also auch für Flächenstücke im $\mathbb{R}^n$ mit $n > 3$.

Eine für uns wichtige Besonderheit, die *nur* im $\mathbb{R}^3$ gilt, ist dagegen die Tatsache, daß wir jedem Flächenstück eine eindeutig bestimmte Normalenrichtung zuordnen können: Im Dreidimensionalen gibt es nur eine

Richtung, die auf der Tangentialebenen eines Flächenstücks senkrecht steht; in Dimension $n > 3$ gibt es dagegen einen ganzen $(n-2)$-dimensionalen Raum mit dieser Eigenschaft.

Wenn wir von der Parameterdarstellung $f: D \to B$ eines regulären Flächenstücks im $\mathbb{R}^3$ und einer festen Reihenfolge der Parameter ausgehen, können wir sogar unterscheiden, nach welcher Seite diese Richtung sich von der Fläche entfernt: Die Tangentialebene wird aufgespannt von den partiellen Ableitungen f_u und f_v von f nach den beiden Parametern u, v auf $D \subseteq \mathbb{R}^2$, und das Kreuzprodukt $f_u \times f_v$ liefert einen Vektor, der auf diesen beiden Tangentialvektoren und somit der gesamten Tangentialebenen senkrecht steht.

Damit können wir jedem Punkt eines *regulären* Flächenstücks eine eindeutig bestimmte Normalenrichtung zuordnen. Man beachte, daß dies nur möglich ist aufgrund der Forderungen, die wir an ein reguläres Flächenstück gestellt haben: Die Abbildung f muß injektiv sein, so daß die Parameterwerte (u, v) zu jedem Punkt des Flächenstücks eindeutig bestimmt sind, und $f_u \times f_v$ darf nirgends verschwinden, da der Nullvektor keine wohlbestimmte Richtung hat.

Typisches Beispiel eines nichtorientierbaren Flächenstücks ist das MÖBIUS-Band

$$f: D = [0,1] \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3; \quad (u,v) \mapsto \begin{pmatrix} (2 + u\cos v)\ \cos 2v \\ (2 + u\cos v)\ \sin 2v \\ u \sin v \end{pmatrix},$$

das durch Zusammenkleben der Enden eines einmal verdrillten rechteckigen Streifens entsteht. Hier ist f für $u = 0$ nicht injektiv, denn $f(0, v) = f(0, v + \pi)$; wir haben also kein reguläres Flächenstück. In der Tat wir für die Parameterwerte $(0, v)$ der Mittelkreis des Bandes zweimal durchlaufen. Dort ist

$$f_u(0,v) = \begin{pmatrix} \cos v \cos 2v \\ \cos v \sin 2v \\ \sin v \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f_v(0,v) = \begin{pmatrix} -4 \sin 2v \\ 4 \cos 2v \\ 0 \end{pmatrix},$$

also

$$f_u(0,v) \times f_v(0,v) = \begin{pmatrix} -4 \sin v \cos 2v \\ -4 \sin v \sin 2v \\ 4 \cos v \end{pmatrix}$$

und damit

$$f_u(0,v) \times f_v(0,v) = -f_u(0, v+\pi) \times f_v(0, v+\pi).$$

es gibt also auf dem Mittelkreis keine eindeutig bestimmte Normalenrichtung.

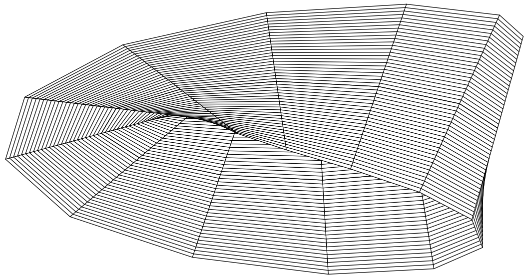


Abb. 25: Das Möbiusband

Für Kurven hatten wir einerseit RIEMANN-STIELTJES-Integrale definiert, die für eine beliebige Funktion auf der Kurve erklärt sind und in deren Definition die Länge des Tangentenvektors eingeht; andererseits hatten wir Integrale über Vektorfelder, in deren Definition der Tangentenvektor selbst einging. Genauso gehen wir auch hier bei den Oberflächenintegralen vor, nur daß wir jetzt den Normalenvektor anstelle des Tangentenvektors benutzen:

Definition: $f: D \to \mathbb{R}^3$ sei ein reguläres Flächenstück.
a) Ist g eine auf $f(D)$ definierte stetige Funktion, so bezeichnen wir

$$\iint_f g\, dO \underset{\text{def}}{=} \iint_D g\big(f(u,v)\big)\ |f_u(u,v) \times f_v(u,v)|\ du\, dv$$

als *Oberflächenintegral* von g über f.
b) Ist $\vec{V}$ ein in einer Umgebung von $f(D)$ definiertes Vektorfeld, so bezeichnen wir

$$\iint_f \vec{V} \cdot d\vec{O} \underset{\text{def}}{=} \iint_D \vec{V}\big(f(u,v)\big) \cdot \big(f_u(u,v) \times f_v(u,v)\big)\, du\, dv$$

als den *Fluß* des Vektorfelds $\vec{V}$ durch die Oberfläche f.

Eine unproblematische Verallgemeinerung des obigen Lemmas zeigt, daß auch diese Integrale im oben definierten Sinne unabhängig von der Parametrisierung sind.

Der Name *Fluß* für das unter *b)* definierte Integral wird klar, wenn man sich f etwa als eine Kugeloberfläche vorstellt. In jedem Punkt $\mathbf{x}$ auf dieser Oberfläche kann man ein kartesisches Koordinatensystem aus einem Normaleneinheitsvektor $\vec{n}_\mathbf{x}$ und zwei Tangenteneinheitsvektoren verankern. Drückt man nun den Vektor $\vec{V}(\mathbf{x})$ in diesem Koordinatensystem aus, so beschreibt die $\vec{n}_\mathbf{x}$-Komponente jenen Teil des Vektors, der durch die Kugeloberfläche hindurch nach innen oder außen geht (welches von beiden hängt ab vom Vorzeichen der Komponente und von der Orientierung des Normaleneinheitsvektors), während die beiden anderen Komponenten den Teil beschreiben, der auf der Oberfläche bleibt, also sozusagen den Fluß *auf* der Oberfläche im Gegensatz zum Fluß *durch* die Oberfläche. Letzterer läßt sich berechnen als das Skalarprodukt $\vec{V}(\mathbf{x}) \cdot \vec{n}_x$ mit dem Normaleneinheitsvektor, und das Integral über diese Funktion ist

$$\iint_f (\vec{V} \cdot \vec{n}_\mathbf{x})\, dO = \iint_f \vec{V} \cdot d\vec{O}\,,$$

denn

$$f_u \times f_v = |f_u \times f_v|\, \vec{n}_\mathbf{x}\,.$$

f) Die Sätze von Stokes und Gauß

In diesem Abschnitt geht es um drei der zentralsten Sätze der mehrdimensionalen Analysis überhaupt: Außer den beiden im Titel erwähnten Sätzen soll noch das mehrdimensionale Analogon des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung bewiesen werden.

Wir beginnen mit letzterem sowie dem Satz von STOKES: Bei beiden geht es darum, die Zirkulation eines Vektorfelds zu bestimmen. Beide Sätze gelten in beliebiger Dimension, jedoch wollen wir sie der Einfachheit halber nur für den $\mathbb{R}^3$ beweisen.

Ausgangspunkt ist ein reguläres Flächenstück $f\colon D \to \mathbb{R}^3$; dessen Bild $B = f(D)$, das „eigentliche“ geometrische Flächenstück also, sei

beschränkt und habe eine reguläre Kurve $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ als Rand. Wie schon mehrfach erwähnt, wollen wir Kurvenintegrale längs γ mit Oberflächenintegralen über f oder – wie wir wegen der Parameterunabhängigkeit auch einigermaßen korrekt sagen können – B in Verbindung bringen.

Wir gehen also aus von einem Vektorfeld $\vec{V}\colon G \to \mathbb{R}^3$, dessen (offener) Definitionsbereich G sowohl B als auch γ enthält, und wollen Informationen über das Kurvenintegral

$$\int_\gamma \vec{V}\, ds\,.$$

Dazu nähern wir B an durch ein Flächenstück B^* an, das wir aus endlich vielen ungefähr rechteckförmigen Teilmengen R_i zusammensetzen können; ein grobes Bild einer solchen Unterteilung ist in Abbildung 26 zu sehen.

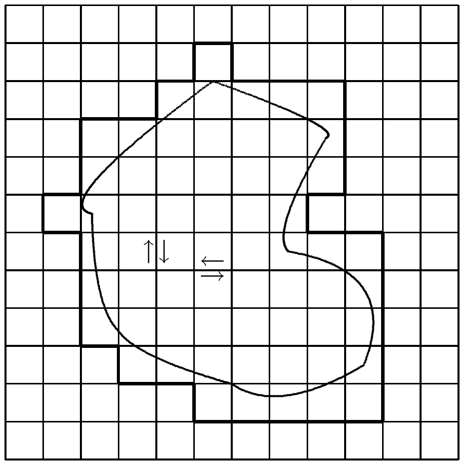


Abb. 26: Unterteilung eines Bereichs

Da f als reguläres Flächenstück vorausgesetzt war, ist überall in B ein wohldefinierter Normaleneinheitsvektor bestimmt; damit können wir auch für jedes der Rechtecke einen Umlaufsinn festlegen: Dieser soll, wenn man von der Spitze des Normalenvektors aus auf des Rechteck schaut, der Gegenuhrzeigersinn sein. Da der Normalenvektor eines regulären Flächenstücks stetig von den Parametern der Fläche abhängt und nirgends verschwindet, ist es gleichgültig, über welchem Punkt eines (hinreichend kleinen) Rechtecks wir ihn betrachten.

In Abbildung 26 wurde davon ausgegangen, daß alle Normalenvektoren nach oben zeigen; der entsprechende Umlaufsinn ist für einige der Rechteckkanten eingezeichnet. Wie man sieht, wird jede gemeinsame Kante zweier benachbarter Rechtecke von diesen beiden Rechtecken in verschiedener Weise orientiert. Falls wir daher für jedes Rechteck R_i das Wegintegral entlang seines Rands berechnen und alle diese Integrale aufaddieren, bleiben nur die Integrale längs der in Abbildung 26 fett ausgezogenen Kanten erhalten, d.h.

$$\sum_{i=1}^{M} \int_{\partial R_i} \vec{V}\, ds = \int_{\partial B^*} \vec{V}\, ds\,,$$

wobei M die Anzahl der „Rechtecke" R_i bezeichnet. Natürlich ist erst recht für jede Funktion h auf B^*

$$\sum_{i=1}^{M} \iint_{R_i} h\, dO = \iint_{B^*} h\, dO\,,$$

wenn wir eine Formel für die einzelnen Rechtecke R_i haben, gilt diese also automatisch auch für B^* und somit, nach einem Grenzübergang, auch für B.

Betrachten wir also ein festes Rechteck R_i und das Kurvenintegral entlang seines Umfangs. Da wir die Rechtecke als klein voraussetzen, können wir $\vec{V}(\mathbf{x})$ auf R_i ohne großen Fehler linearisieren. Dazu sei $\mathbf{x}_i \in R_i$ ein beliebiger Punkt des Rechtecks. Ein beliebiger Punkt $\mathbf{x} \in R_i$ hat dann die Form $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i + \vec{h}$ mit einem nicht allzu großen Vektor $\vec{h}$. Nach Definition der Differenzierbarkeit ist dann

$$\begin{aligned}\vec{V}(\mathbf{x}) &= \vec{V}(\mathbf{x}_0 + \vec{h}) = \vec{V}(x_0) + J_{\vec{V}}(\mathbf{x}_0)\vec{h} + o\big(|\vec{h}|\big)\\ &= \vec{V}(\mathbf{x}_0) + S\cdot\vec{h} + \tfrac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{V}(\mathbf{x}_0)\times h + o\big(|\vec{h}|\big)\,,\end{aligned}$$

wobei S für den symmetrischen Anteil der JACOBI-Matrix $J_{\vec{V}}(\mathbf{x}_0)$ steht. Wenn wir den Term $o\big(|\vec{h}|\big)$ vernachlässigen, ist also

$$\begin{aligned}\int_{\partial R_i} \vec{V}(\mathbf{x})\, ds &= \int_{\partial R} \vec{V}(\mathbf{x}_0 + \vec{x})\, ds\\ &\approx \int_{\partial R} \vec{V}(\mathbf{x}_0)\, ds + \int_{\partial R} S\vec{x}\, ds + \tfrac{1}{2}\int_{\partial R} \operatorname{rot}\vec{V}(\mathbf{x}_0)\times\vec{x}\, ds\,,\end{aligned} \qquad (*)$$

wobei R das um den negativ genommenen Ortsvektor von $\mathbf{x}_0$ verschobene Rechteck R_i sei, d.h., wenn $\mathbf{x}$ den Rand von R durchläuft, durchläuft $\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}$ den Rand von R_i.

Das erste Integral in dieser Summe ist ein Kurvenintegral über das konstante Vektorfeld, das jedem Punkt den Vektor $\vec{V}(\mathbf{x}_0)$ zuordnet. Dieses Vektorfeld ist offensichtlich ein Potentialfeld, denn sind V_1, V_2 und V_3 die Komponenten dieses Vektors, so ist

$$\operatorname{grad}\big(\vec{V}(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{x}\big) = \operatorname{grad}(V_1x + V_2y + V_3z) = \vec{V}(x_0)\,.$$

Genauso ist auch $S\vec{h}$ ein Potentialfeld, denn der Gradient der quadratischen Form

$$\begin{aligned}{}^t\vec{x}S\vec{x} &= S_{11}x^2 + S_{22}y^2 + S_{33}z^2\\ &\quad + (S_{12}+S_{21})xy + (S_{13}+S_{31})xz + (S_{23}+S_{32})yz\end{aligned}$$

ist wegen $S_{k\ell} = S_{\ell k}$ gleich diesem Vektorfeld.

Damit sind also die beiden Vektorfelder $\vec{V}(x_0)$ und $S\vec{x}$ zirkulationsfrei, und die Integrale über den (als Kurve geschlossenen) Rand von R_i verschwinden.

Damit haben wir (bis auf die hier unterdrückten, für einen Beweis aber unbedingt notwendigen Abschätzung der Fehlerterme) den folgenden Satz bewiesen:

Satz: Das Vektorfeld $\vec{V}\colon G \to \mathbb{R}^3$ habe eine symmetrische JACOBI-Matrix, d.h. $\operatorname{rot}\vec{V}$ sei identisch null. Dann gilt für jedes reguläre

Flächenstück $f\colon D \to G$, dessen Rand eine Kurve γ ist,

$$\int_\gamma \vec V\,ds = 0\,.$$

Denn nach obiger Rechnung verschwindet bei symmetrischer JACOBI-Matrix das Kurvenintegral entlang eines jeden Rechtecks, und die Summe all dieser Kurvenintegrale konvergiert bei immer feinerer Rechteckunterteilung des Flächenstücks gegen das Kurvenintegral längs des Rands γ von $B = f(D)$.

Dies reicht schon für den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung im $\mathbb{R}^3$: Wir wissen bereits, daß ein Vektorfeld genau dann eine Stammfunktion hat, wenn es zirkulationsfrei ist – die eine Richtung dieser Aussage haben wir gerade wieder angewandt. Außerdem wissen wir, daß für ein Vektorfeld mit Stammfunktion die Rotation verschwindet, denn für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion φ ist $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0$. Für ein leicht nachprüfbares Kriterium zur Existenz einer Stammfunktion fehlt also nur noch die Aussage, daß aus dem Verschwinden der Rotation die Zirkulationsfreiheit folgt.

Diese Aussage ist aber leider falsch: Das Beispiel des Magnetfelds eines stromdurchflossenen Leiters zeigte, daß die Rotation sehr wohl identisch verschwinden kann, ohne daß das Vektorfeld zirkulationsfrei ist. Dieses Magnetfeld $\vec V(x, y, z) = \frac{c}{x^2+y^2}\binom{-y}{x}$ ist allerdings auf der z-Achse nicht definiert, und wir hatten im Beispiel Kreise um die z-Achse betrachtet.

Bei einem überall definiertes Vektorfeld hätten wir für einen solchen Kreis einfach die geschlossene Kreisscheibe B betrachten können, deren Rand der betrachtete Integrationsweg ist, und nach obigem Satz wäre das Integral längs des Randes verschwunden.

Das Problem bei diesem Gegenbeispiel liegt also offensichtlich darin, daß der betrachtete Integrationsweg nicht als Rand eines regulären Flächenstücks im Definitionsbereich des Vektorfelds geschrieben werden kann: Da das Vektorfeld auf der z-Achse nicht definiert ist, muß der Schnittpunkt mit der z-Achse aus der Kreisscheibe herausgenommen

werden, wir haben also nur noch einen punktierten Kreis, und dessen Rand besteht aus der Kreislinie *plus* dem herausgenommenen Punkt.

Um solche Fälle auszuschließen definieren wir:

Definition: Eine offene zusammenhängende Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt *einfach zusammenhängend,* wenn jede geschlossene Kurve γ in G Rand eines regulären Flächenstücks ist.

Anschaulich kann man dies auch so interpretieren, daß die Kurve innerhalb von G auf einen Punkt zusammengezogen werden kann: Man denke sich die Kurve als ein stark angespanntes Stück Gummi; wenn man dieses auf ein Flächenstück legt, zieht es sich automatisch zusammen. Umgekehrt überstreicht das Gummi beim Zusammenziehen auf einen Punkt ein Flächenstück, dessen Rand die Ausgangsposition des Gummis ist.

Mit dieser Definition gilt dann offensichtlich die folgende Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung auf den $\mathbb{R}^3$:

Satz: Ein differenzierbares Vektorfeld $\vec V\colon G \to \mathbb{R}^3$ auf einer einfach zusammenhängenden Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^3$ hat genau dann eine Stammfunktion, wenn $\operatorname{rot}\vec V$ dort identisch verschwindet, d.h. also, wenn die JACOBI-Matrix symmetrisch ist.

■

Für ein ebenes Vektorfeld gilt entsprechend

Satz: Ein differenzierbares Vektorfeld $\vec V\colon G \to \mathbb{R}^2$ auf einer einfach zusammenhängenden Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^3$ hat genau dann eine Stammfunktion, wenn

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial x}$$

dort identisch verschwindet, d.h. also, wenn die JACOBI-Matrix symmetrisch ist.

Beweis: Dies folgt sofort aus dem Satz von GREEN.

■

Auf höhere Dimension soll nicht genauer eingegangen werden; nur soviel sei erwähnt: Die eindeutige Bestimmtheit des Normalenvektors eines Flächenstücks im $\mathbb{R}^3$ hat in höheren Dimensionen keine Entsprechung mehr; dort muß man von einem Flächenstück explizit *fordern,* daß es orientierbar ist im folgenden Sinne: Man kann es durch kleine rechteckförmige Flächen überdecken und jedem dieser „Rechtecke" einen Umlaufsinn zuordnen derart, daß die gemeinsame Kante zweier Nachbarrechtecke von diesen beiden Rechtecken entgegengesetzt orientiert wird.

Wenn man dann den einfachen Zusammenhang einer offenen zusammenhängenden Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ dadurch definiert, daß jede geschlossene Kurve in G Rand eines so orientierbaren Flächenstücks sein soll, was auch wieder im wesentlichen äquivalent ist zur Zusammenziehbarkeit der Kurve, gilt auch hier der

Satz: Ein differenzierbares Vektorfeld $\vec{V}: G \to \mathbb{R}^n$ auf einer einfach zusammenhängenden Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ hat genau dann eine Stammfunktion, wenn die JACOBI-Matrix von $\vec{V}$ symmetrisch ist. ■

Damit haben wir den ersten der drei Hauptsätze dieses Paragraphen im wesentlichen bewiesen; wir machen weiter, wo wir vor der Spezialisierung auf symmetrische Vektorfelder aufgehört haben und folgern, daß nach $(*)$ für ein beliebiges differenzierbares Vektorfeld gilt

$$\int_{\partial R_i} \vec{V}(\mathbf{x})\,ds \approx \frac{1}{2}\int_{\partial R} \operatorname{rot}\vec{V}(\mathbf{x}_0) \times \vec{x}\,ds\,;$$

wir müssen uns also dieses Integral genauer ansehen. Dabei setzen wir zur Abkürzung

$$\vec{a} = \operatorname{rot}\vec{V}(x_0)\,;$$

dann ist der Integrand

$$\tfrac{1}{2}(\vec{a} \times \vec{x}) \cdot ds\,.$$

Nach Definition eines Kurvenintegrals ist das Integral hierüber Grenzwert einer Summe von Termen der Art

$$(\vec{a} \times \vec{x}_j) \cdot \vec{t}_j\,,$$

wobei $\mathbf{x}_j$ Punkte auf der Kurve sind und t_j die Tangentenvektoren in diesen Punkten. Dieses Skalarprodukt eines Vektorprodukts mit einem Vektor ist bekanntlich das *Spatprodukt,* und es ist gleich der Determinante mit den Spaltenvektoren $\vec{a}, \vec{x}_j$ und t_j. Diese Determinante ändert ihr Vorzeichen, wenn man zwei Spalten vertauscht; tut man dies zweimal, kehrt sie wieder zu ihrem alten Wert zurück. Daher ist

$$(\vec{a} \times \vec{x}_j) \cdot \vec{t}_j = (\vec{x}_j \times \vec{t}_j) \cdot \vec{a}\,.$$

Der Vektor $\vec{x}_j \times \vec{t}_j$ steht senkrecht auf $\vec{x}_j$ und auf $\vec{t}_j$; falls wir also von einem *flachen* Rechteck ausgehen, steht er auch senkrecht auf diesem und hat somit die Richtung des Normalenvektors. Sein Betrag ist gleich der Fläche des von $\vec{x}_j$ und $\vec{t}_j$ aufgespannten Parallelogramms, die Hälfte davon also gleich der Fläche des von diesen beiden Vektoren aufgespannten Dreiecks. Die Summe aller dieser Dreiecksflächen ist im Limes gleich der Fläche des Rechtecks, über dessen Rand wir integrieren, also ist das Integral über den Rand des Rechtecks für kleine Rechtecke näherungsweise gleich einem Skalarprodukt $\vec{n} \cdot \vec{a}$, wobei $\vec{n}$ als Länge den Flächeninhalt des Rechtecks hat und als Richtung die des Normalenvektors. Als Grenzwert einer Summe solcher Skalarprodukte ist aber gerade das Integral

$$\iint_f \operatorname{rot}\vec{V}\,d\vec{O}$$

erklärt; wenn wir immer feinere Rechteckunterteilungen betrachten, konvergiert die Summe der Kurvenintegrale über die Ränder dieser Rechtecke also einerseits gegen das Kurvenintegral des Vektorfelds über den Rand γ des betrachteten Flächenstücks, andererseits aber auch gegen das Integral der Rotation von $\vec{V}$ über das Flächenstück selbst. Dies ist der

Satz von Stokes: $\vec{V}: G \to \mathbb{R}^3$ sei ein differenzierbares Vektorfeld auf der offfenen Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^3$. Weiter sei $f: D \to G$ ein reguläres Flächenstück mit einer stückweise regulären Kurve γ als Rand. Dann ist

$$\int_\gamma \vec{V}\,ds = \iint_f \operatorname{rot}\vec{V}\,d\vec{O}\,.$$

Aus diesem Satz können wir auch eine andere Charakterisierung der Rotation herleiten:

Satz: $\vec{V}: G \to \mathbb{R}^3$ sei ein differenzierbares Vektorfeld, $\vec{e}$ ein Einheitsvektor, und $\gamma_{\vec{e},r}$ ein Kreis mit Radius r um $\mathbf{x}_0$ ist, der in einer Ebenen senkrecht zu $\vec{e}$ liege und von $\vec{e}$ aus gesehen im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen werde; die gesamte von $\gamma_{\vec{e},r}$ berandete Kreisscheibe liege in G. Dann ist

$$\operatorname{rot}\vec{V}(\mathbf{x}_0) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{\gamma_{\vec{e},r}} \vec{V}\,d\vec{s}\,.$$

Beweis: $\gamma_{\vec{e},r}$ ist Rand einer Kreisscheibe D vom Radius r mit Flächeninhalt πr^2; nach dem Satz von STOKES ist

$$\int\limits_{\gamma_{\vec{e},r}} \vec{V}\,d\vec{s} = \iint\limits_{D} \operatorname{rot}\vec{V}\,d\vec{O} = \iint\limits_{D} (\operatorname{rot}\vec{V})\cdot\vec{e}\,dO\,,$$

und für immer kleiner werdende Werte von r stimmt dies immer besser überein mit $\operatorname{rot}\vec{V}(\mathbf{x}_0)\cdot\vec{e}$ mal dem Flächeninhalt der Kreisscheibe. ■

Falls die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt sind, falls also insbesondere die Kreislinie Rand einer im Definitionsbereich von $\vec{V}$ enthaltenen Fläche ist, läßt sich die Rotation somit als Limes einer Art „normierter“ Zirkulation auffassen, d.h. als Integral längs einer geschlossenen Kurve dividiert durch die Länge dieser Kurve. Die Rotations gibt also auch ein Maß für die Abweichung eines Vektorfelds von der Zirkulationsfreiheit.

Damit wäre auch der zweite Hauptsatz dieses Abschnitts bewiesen; bleibt noch der

Satz von Gauß: $\vec{V}: G \to \mathbb{R}^3$ sei ein differenzierbares Vektorfeld und $f: D \to G$ sei ein reguläres Flächenstück derart, daß $B = f(D)$ Rand eines beschränkten dreidimensionalen Bereichs V sei. Dann ist

$$\iint\limits_{f} \vec{V}\,d\vec{O} = \iiint\limits_{V} \operatorname{div}\vec{V}\,dx\,dy\,dz\,.$$

Der *Beweis* beruht auf derselben Idee wie der des Satzes von STOKES: Dort hatten wir ein Flächenstück durch Rechtecke angenähert, um das Kurvenintegral längs seines Randes zu einem Integral über das Flächenstück in Beziehung zu setzen; hier unterteilen wir entsprechend das Volumen V in kleine, der Einfachheit halber als achsenparallel vorausgesetzte Quader, um das Oberflächenintegral über den Rand von V mit einem Integral über V in Beziehung zu setzen.

Ein solcher Quader sei Q_i, und $\vec{h}, \vec{k}, \vec{\ell}$ seien die drei Kantenvektoren von Q_i in Richtung der x-, y- und z-Achse. Dann ist das Integral von $\vec{V}$ über die Oberfläche von Q_i gleich

$$\iint\limits_{\partial Q_i} \vec{V}\,d\vec{O} = \iint\limits_{\substack{\text{vordere und}\\ \text{hintere Seitenfläche}}} \vec{V}\,d\vec{O} + \iint\limits_{\substack{\text{linke und}\\ \text{rechte Seitenfläche}}} \vec{V}\,d\vec{O} + \iint\limits_{\substack{\text{obere und}\\ \text{untere Seitenfläche}}} \vec{V}\,d\vec{O}\,,$$

und weiter ist beispielsweise

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\substack{\text{linke und}\\ \text{rechte Seitenfläche}}} \vec{V}\,d\vec{O} &= \iint\limits_{\substack{\text{linke}\\ \text{Seitenfläche}}} \vec{V}\,d\vec{O} + \iint\limits_{\substack{\text{rechte}\\ \text{Seitenfläche}}} \vec{V}\,d\vec{O} \\
&= \iint\limits_{\substack{\text{linke}\\ \text{Seitenfläche}}} \vec{V}(\mathbf{x})\,d\vec{O} - \iint\limits_{\substack{\text{linke}\\ \text{Seitenfläche}}} \vec{V}(\mathbf{x}+\vec{h})\,d\vec{O} \\
&= -\iint\limits_{\substack{\text{linke}\\ \text{Seitenfläche}}} \big(\vec{V}(\mathbf{x}+\vec{h}) - \vec{V}(\mathbf{x})\big)\,d\vec{O}\,,
\end{aligned}$$

denn da alle Normalenvektoren nach außen zeigen, sind die linke und die rechte Seite des Quaders verschieden orientiert.

Nun kommt die Differenzierbarkeit von $\vec{V}$ ins Spiel und sagt uns, daß

$$\vec{V}(\mathbf{x}+\vec{h}) = \vec{V}(\mathbf{x}) + J_{\vec{V}}(\mathbf{x})\cdot\vec{h} + o\big(|\vec{h}|\big)$$

oder, anders ausgedrückt,

$$\vec{V}(\mathbf{x}+\vec{h}) - \vec{V}(\mathbf{x}) = J_{\vec{V}}(\mathbf{x})\cdot\vec{h} + o\big(|\vec{h}|\big)$$

ist. Da wir in diesem Semester noch viel zu tun haben, vernachlässigen wir den Term $o\big(|\vec{h}|\big)$ in der Hoffnung, daß er für immer feiner werdende

Unterteilungen trotz der dann ansteigenden *Anzahl* dieser Terme keine Rolle mehr spielen wird.

In der Tat sollte ein mit den Abschätzungstechniken aus der Analysis I vertrauter Leser keine Schwierigkeiten haben, dies mathematisch streng zu zeigen. Die Heuristik, nach der man dabei vorgeht, ist (hoffentlich) klar: Die Anzahl aufeinanderliegender Quader in Richtung der x-Achse ist proportional zu $1/\,|\vec{h}|$, und $1/\,|\vec{h}|$ Terme der Größenordnung $o(|\vec{h}|$ addieren sich zu einem Term der Größenordnung $o(1)$, d.h. zu einer Funktion, die gegen Null geht. (Die Aussage „geht schneller als 1 gegen Null" ist natürlich gleichbedeutend damit, daß die Funktion überhaupt gegen Null geht.)

Alsdann kommt es uns nur auf das Produkt $J_{\vec{V}}(\mathbf{x})\cdot\vec{h}$ an, und wir müssen dieses weiter ausrechen. Da der Vektor $\vec{h}$ parallel zur x-Achse gewählt war, sind seine zweite und dritte Komponente gleich null, und die erste Komponente ist gleich der Länge h von $\vec{h}$. Damit ist, wenn wir die drei Komponenten von $\vec{V}$ mit V_1, V_2 und V_3 bezeichnen,

$$J_{\vec{V}}(\mathbf{x})\cdot\vec{h} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x} & \frac{\partial V_1}{\partial y} & \frac{\partial V_1}{\partial z} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x} & \frac{\partial V_2}{\partial y} & \frac{\partial V_2}{\partial z} \\ \frac{\partial V_3}{\partial x} & \frac{\partial V_3}{\partial y} & \frac{\partial V_3}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = h \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x} \\ \frac{\partial V_1}{\partial y} \\ \frac{\partial V_1}{\partial z} \end{pmatrix} .$$

Der Einheitsnormalenvektor der linken Seite des Quaders zeigt in Richtung der negativen y-Achse, denn die linke Seite ist parallel zur (y,z)-Ebene und zeigt nach außen. Wenn wir den Einheitsvektor der x-Achse mit $\vec{e}_x$ bezeichnen, ist daher

$$d\vec{O} = -e_x\, dy\, dz$$

und damit

$$\iint\limits_{\substack{\text{linke und}\\ \text{rechte Seitenfläche}}} \vec{V}\, d\vec{O} \approx -\iint\limits_{\substack{\text{linke}\\ \text{Seitenfläche}}} \big(\vec{V}(\mathbf{x}+\vec{h}) - \vec{V}(\mathbf{x})\big)\, d\vec{O}\,,$$

$$= \iint\limits_{\substack{\text{linke}\\ \text{Seitenfläche}}} h \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x} \\ \frac{\partial V_1}{\partial y} \\ \frac{\partial V_1}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dx\, dy = h \iint\limits_{\substack{\text{linke}\\ \text{Seitenfläche}}} \frac{\partial V_1}{\partial x}\, dy\, dz\,.$$

Ganz entsprechend ist

$$\iint\limits_{\substack{\text{vordere und}\\ \text{hintere Seitenfläche}}} \vec{V}\, d\vec{O} \approx k \iint\limits_{\substack{\text{vordere}\\ \text{Seitenfläche}}} \frac{\partial V_2}{\partial y}\, dx\, dz$$

und

$$\iint\limits_{\substack{\text{obere und}\\ \text{untere Seitenfläche}}} \vec{V}\, d\vec{O} \approx \ell \iint\limits_{\substack{\text{obere}\\ \text{Seitenfläche}}} \frac{\partial V_3}{\partial z}\, dx\, dy\,.$$

Nach dem Mittelwertsatz für Flächenintegrale können wir diese Integrale weiter abschätzen: Es gibt Punkte ξ auf der linken, η auf der vorderen und ζ auf der unteren Seitenfläche, so daß

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\substack{\text{linke und}\\ \text{rechte Seitenfläche}}} \vec{V}\, d\vec{O} &\approx h \iint\limits_{\substack{\text{linke}\\ \text{Seitenfläche}}} \frac{\partial V_1}{\partial x}\, dy\, dz \\ &= h\frac{\partial V_1}{\partial x}(\xi) \iint\limits_{\substack{\text{linke}\\ \text{Seitenfläche}}} dy\, dy = hkl\frac{\partial V_1}{\partial x}(\xi)\,.\end{aligned}$$

Genauso ist

$$\iint\limits_{\substack{\text{vordere und}\\ \text{hintere Seitenfläche}}} \vec{V}\, d\vec{O} \approx hkl\frac{\partial V_2}{\partial y}(\eta)$$

und

$$\iint\limits_{\substack{\text{obere und}\\ \text{untere Seitenfläche}}} \vec{V}\, d\vec{O} \approx hkl\frac{\partial V_3}{\partial z}(\zeta)\,.$$

Nun ist es wieder an der Zeit, eine etwas komplexerere Abschätzung unter den Tisch fallen zu lassen: Die Punkte ξ,η und ζ liegen auf den Seitenflächen eines Quaders, der immer kleiner werden soll. Damit rücken auch diese Punkte immer weiter zusammen und wir sollten wohl keinen allzu großen Fehler machen, wenn wir einfach *irgendeinen* Punkt $\mathbf{x}_i$ im Quader Q_i auswählen und sowohl ξ,η als auch ζ durch diesen Punkt ersetzen; die formale Rechtfertigung hierfür geht wieder aus von der Differenzierbarkeit des Vektorfelds V und beruht im übrigen auf Abschätzungen.

Wenn wir das alles glauben, ist also

$$\iint\limits_{\substack{\text{linke und}\\\text{rechte Seitenfläche}}} \vec V\,d\vec O \approx hkl\frac{\partial V_1}{\partial x}(\mathbf{x}_i)\,,$$

$$\iint\limits_{\substack{\text{vordere und}\\\text{hintere Seitenfläche}}} \vec V\,d\vec O \approx hkl\frac{\partial V_2}{\partial y}(\mathbf{x}_i) \quad \text{und}$$

$$\iint\limits_{\substack{\text{obere und}\\\text{untere Seitenfläche}}} \vec V\,d\vec O \approx hkl\frac{\partial V_3}{\partial z}(\mathbf{x}_i)\,.$$

Das Oberflächenintegral über die gesamte Quaderoberfläche ist die Summe dieser drei Teilintegrale, und da bekanntlich

$$\frac{\partial V_1}{\partial x}(\mathbf{x}_i)+\frac{\partial V_2}{\partial y}(\mathbf{x}_i)+\frac{\partial V_3}{\partial z}(\mathbf{x}_i)=\operatorname{div}\vec V(\mathbf{x}_i)$$

ist, haben wir somit gezeigt, daß

$$\iint\limits_{\partial Q_i}\vec V\,d\vec O \approx hkl\ \operatorname{div}\vec V(\mathbf{x}_i)=\operatorname{div}\vec V(\mathbf{x}_i)\cdot vol(Q_i) \qquad (*)$$

ist.

Damit haben wir eine lokale Version des Satzes von GAUSS gezeigt; zum Beweis des Satzes selbst nähern wir das Volumen V an durch die Quader Q_i. Dann ist

$$\iiint\limits_V \operatorname{div}\vec V\,dx\,dy\,dz \approx \sum_i \operatorname{div}\vec V(\mathbf{x}_i)\cdot vol(Q_i)\,,$$

und wenn wir die Quader immer weiter verkleinern, wird im Limes aus dem Ungefährzeichen ein Gleichheitszeichen – genau so hatten wir schließlich Volumenintegrale definiert.

Im Falle des Integrals über die Randfläche $B=f(D)$ von V ist die Situation etwas komplizierter: Wie beim Beweis des Satzes von STOKES überlegt man sich zunächst leicht, daß eine gemeinsame Seitenfläche zweier benachbarter Quader von den beiden Quadern verschieden orientiert wird, so daß sich die beiden Integrale über diese Fläche gegenseitig

aufheben; die Summe über alle Oberflächenintegrale über die Q_i ist also gleich der Summe über alle Oberflächenintegrale über jene Seitenflächen von Quadern Q_i, die nur Seitenfläche eines einzigen Quaders sind, d.h. also über die Randfläche der Vereinigung aller Quader Q_i.

Die Quaderflächen, die diesen Rand ausmachen, sind allesamt parallel zu Koordinatenebenen; ihre Normalenvektoren sind also parallel zu Koordinaten*achsen,* wohingegen die Normalenvektoren von B natürlich beliebige Richtungen haben können. Wir müssen uns überlegen, warum die Integrale im Limes trotzdem gleich sein können.

Der Integrand bei einem Oberflächenintegral über ein Vektorfeld ist das Skalarprodukt aus dem Normalenvektor von B im jeweils betrachteten Punkt und dem Wert $\vec V(\mathbf{x})$ des Vektorfelds in diesem Punkt. Konkret sei etwa $\vec n$ der Normalenvektor im Punkt $\mathbf{x}\in B$, und in Koordinaten sei

$$\vec n=\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix} \quad\text{und}\quad \vec V(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\vec V(\mathbf{x})\cdot\vec n &= v_1n_1+v_2n_2+v_3n_3\\ &=\vec V(\mathbf{x})\cdot(n_1\vec e_1)+\vec V(\mathbf{x})\cdot(n_2\vec e_2)+\vec V(\mathbf{x})\cdot(n_3\vec e_3)\,;\end{aligned}$$

wir erhalten also dasselbe Skalarprodukt auch, indem wir $\vec V(\mathbf{x})$ nacheinander mit geeigneten Normalenvektoren von Quaderflächen parallel zu den Koordinatenebenen multiplizieren und die Ergebnisse aufaddieren.

Falls $\vec n$ drei nichtverschwindende Komponenten hat, ist klar, daß die Fläche B in der Nähe von $\mathbf{x}$ nur so durch Quader angenähert werden kann, daß es dort freie Randflächen parallel zu allen drei Koordinatenebenen gibt; ein nicht allzu schwieriges Argument über den Satz von PYTHAGORAS zusammen mit Limesbetrachtungen zeigt, daß auch mit den Längen alles gut geht, so daß auch das Oberflächenintegral über B gleich der Summe der Integrale über die Quaderoberflächen ist.

Wie wir oben gesehen haben, ist der Satz für einen einzelnen Quader richtig; da auf beiden Seiten das Integral durch Summen entsprechender

Integrale für Quader angehähert werden kann, ist also der Satz von GAUSS (modulo zahlreicher Auslassungen) bewiesen. ■

Genau wie der Satz von STOKES zu einer alternativen Definition der Rotation führte, kann mit dem Satz von GAUSS die *Divergenz* auf andere Weise ausgedrückt werden; zumindest für Quader haben wir die entsprechende Formel im gerade beendeten Beweis als Formel $(*)$ bereits hergeleitet:

Satz: Für ein differenzierbares Vektorfeld $\vec{V}: G \to \mathbb{R}^3$ ist

$$\operatorname{div} \vec{V}(\mathbf{x}_0) = \lim_{r\to 0} \frac{3}{4\pi r^3} \iint\limits_{\partial B_r} \vec{V}\, d\vec{O}\,,$$

wobei B_r eine Kugel mit Radius r um $\mathbf{x}_0$ ist, deren Normalenvektoren nach außen zeigen.

Beweis: Nach dem Mittelwertsatz ist das Volumenintegral über B_r gleich dem Produkt des Volumens $\frac{4}{3}\pi r^3$ von B_r mit dem Wert des Integranden $\operatorname{div} \vec{V}$ an einem geeigneten Punkt der Kugel. Falls r gegen Null geht, muß dieser Punkt immer näher an den Mittelpunkt der Kugel rücken, bis er im Limes mit diesem zusammenfällt. ■

Auch der Satz von GAUSS läßt sich wieder anschaulich interpretieren: Bei der Definition der Divergenz haben wir uns bereits überlegt, daß diese mißt, inwieweit ein Punkt eher eine Quelle oder eine Senke für ein Vektorfeld ist. Da das Oberflächenintegral gerade gleich dem Fluß des Vektorfelds durch die betrachtete Oberfläche ist und wir die Oberfläche so orientiert haben, daß der Normalenvektor nach außen zeigt, sagt der Satz von GAUSS also einfach, daß der gesamte Fluß einer Vektorfelds durch die Oberfläche eines Volumens V genau das ist, was im Innern von V erzeugt (oder, bei negativen Vorzeichen auf beiden Seiten) vernichtet wird.

Der obige Satz zur Charakterisierung der Divergenz zeigt dementsprechend noch einmal, warum die Divergenz auch als *Quellendichte* bezeichnet wird: Nach dem Satz von GAUSS ist der Fluß durch die Oberfläche einer Kugel gleich der Summe des im Innern erzeugten oder vernichteten; dividiert man dies durch das Volumen der Kugel, entsteht die Quellen*dichte,* deren Grenzwert für immer kleiner werdende Kugeln gleich der Divergenz ist.

§7: Anwendung auf komplexe und harmonische Funktionen

Da wir die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ mit der Ebene $\mathbb{R}^2$ identifizieren können, sind Abbildungen $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ spezielle Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$. Bevor wir die Integralsätze aus den letzten Abschnitten auf diese Funktionen sowie ähnliche Funktionen auf beliebigen Räumen $\mathbb{R}^n$ anwenden, sollten wir uns zunächst überlegen, was Differenzierbarkeit im Komplexen bedeutet.

a) Holomorphe Funktionen

Die Definition ist die altvertraute

Definition: Eine Funktion $f: D \to \mathbb{C}$ auf der offenen Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt *komplex differenzierbar* oder *holomorph* im Punkt $z \in D$, wenn der Grenzwert

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existiert. f heißt *holomorph in D,* wenn f in jedem Punkt $z \in D$ holomorph ist.

Der große Unterschied zum reellen Differentialquotienten liegt natürlich darin, daß h eine komplexe Zahl ist, die sich nicht nur von rechts und links, sondern aus allen Richtungen und jedem beliebigen Weg (für den $z + h$ noch in D liegt) dem Nullpunkt nähern kann. Um zu sehen, was das bedeutet, betrachten wir zunächst die beiden einfachsten Fälle, daß sich h ganz auf der reellen *bzw.* der imaginären Achse bewegt.

Konkret sei $z = x + iy$ und

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

mit zwei Funktionen $u, v: \widetilde{D} \to \mathbb{R}$, wobei $\widetilde{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ die Menge aller Punkte (x, y) ist, für die $x+iy$ in D liegt. (Wenn wir, was zwar nicht ganz exakt, aber doch recht harmlos ist, $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$ miteinander identifizieren, ist $\widetilde{D}$ einfach „gleich" D.)

Für *reelles* h ist dann

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h}+i\,\frac{v(x+h,y)-v(x,y)}{h};$$

der Grenzwert für h gegen Null ist also, so er existiert, gleich

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x,y).$$

Für rein *imaginäres* $h=ik$ ist entsprechend

$$\begin{aligned}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}&=\frac{u(x,y+k)-u(x,y)}{ik}+i\,\frac{v(x,y+k)-v(x,y)}{ik}\\&=\frac{v(x,y+k)-v(x,y)}{k}-i\,\frac{u(x,y+k)-u(x,y)}{k};\end{aligned}$$

der Grenzwert für h (oder k) gegen Null ist also, so er existiert, gleich

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)-i\,\frac{\partial u}{\partial y}(x,y).$$

Falls f komplex differenzierbar ist, müssen beide Grenzwerte gleich sein, d.h.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\quad\text{und}\quad\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=-\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

oder kurz

$$u_x=v_y\quad\text{und}\quad v_x=-u_y.$$

Diese Gleichungen heißen CAUCHY-RIEMANNsche Differentialgleichungen; sie sind also eine notwendige Bedingung dafür, daß eine Funktion komplex differenzierbar ist.

Weniger offensichtlich ist, daß diese Bedingung sogar *hinreichend* ist. Um das einzusehen, erinnern wir uns an die bereits in Kapitel 2 erwähnte Möglichkeit, die komplexen Zahlen mit einem Matrizenring zu identifizieren: Für zwei komplexe Zahlen $a+ib$ und $c+id$ ist

$$(a+ib)(c+id)=ac-bd+i(ad+bc);$$

entsprechend ist

$$\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c&d\\-d&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac-bd&ad+bc\\-(ad+bc)&ac-bd\end{pmatrix}.$$

Da es mit der Addition keinerlei Probleme gibt, ist daher die Abbildung

$$\mathbb{C}\to\left\{\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}\,\middle|\,a,b\in\mathbb{R}\right\};a+ib\mapsto\begin{pmatrix}a&b\\-b&a\end{pmatrix}$$

verträglich mit der Addition wie auch der Multiplikation; außerdem ist sie offensichtlich bijektiv und damit auch verträglich mit Subtraktion und (soweit definiert) Division. Damit können wir die komplexe Zahl $a+ib$ identifizieren mit der Matrix

$$\begin{pmatrix}a&b\\-a&b\end{pmatrix}.$$

(Obwohl eigentlich schon alles bewiesen ist, sollten Skeptiker zur Vorsicht noch einmal nachrechnen, daß die Multiplikation von Matrizen dieser speziellen Form, im Gegensatz zur allgemeinen Matrixmultiplikation, wirklich kommutativ ist.)

Betrachten wir nun unsere Funktion f ernsthaft als reelle Funktion $F\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$. (Auch hier ist es wieder Geschmackssache, ob man wirklich zwischen f und F unterscheiden will.) Mit obiger Notation ist

$$F(x,y)=\begin{pmatrix}u(x,y)\\v(x,y)\end{pmatrix},$$

und für diese Funktion gilt, sofern sie differenzierbar ist,

$$F(x+h,y+k)=F(x,y)+J_f(x,y)\cdot\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}+o\big(\sqrt{h^2+k^2}\big).$$

Hier ist

$$J_f(x,y)=\begin{pmatrix}u_x&u_y\\v_x&v_y\end{pmatrix},$$

und diese Matrix ist genau dann von der Form, die einer komplexen Zahl w entspricht, wenn die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen

$$u_x=v_y\quad\text{und}\quad u_y=-v_x$$

erfüllt sind und somit

$$w = u_x + iu_y = v_y - iv_x$$

ist. Alsdann läßt sich die Gleichung

$$\begin{pmatrix} u(x+k, y+\ell) \\ v(x+k, y+\ell) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} + o\left(\left\|\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}\right\|\right)$$

auch schreiben als

$$f(z+h) = f(z) + wh + o\left(\left|\vec{h}\right|\right)\ ;$$

denn die Grundrechenarten für komplexe Zahlen und die zugehörigen Matrizen entsprechen einander in eindeutiger Weise, und der Betrag der komplexen Zahl $h = k + i\ell$ ist gleich $\sqrt{k^2+\ell^2}$ und damit gleich der Länge des Vektors $\binom{k}{\ell}$. Wenn die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen erfüllt sind, ist f daher im Punkt z differenzierbar mit Ableitung $f'(z) = w$.

Damit haben wir gezeigt

Satz: Die Funktion $f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$ ist genau dann komplex differenzierbar, wenn die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen

$$u_x(x,y) = v_y(x,y) \quad \text{und} \quad u_y(x,y) = -v_x(x,y)$$

erfüllt sind. ∎

b) Der Cauchysche Integralsatz

In völliger Analogie zum reellen Kurvenintegral lassen sich auch komplexe Kurvenintegrale definieren: Ein *Kurvenstück* in $\mathbb{C}$ ist eine Abbildung

$$\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto \gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$$

mit zwei stetig differenzierbaren Funktionen $\alpha, \beta\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ auf einem reellen Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$; eine *Kurve* γ ist entsprechend eine Folge $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ von Kurvenstücken mit der Eigenschaft, daß der Endpunkt von γ_i gleich dem Anfangspunkt von γ_{i+1} ist, und γ heißt *geschlossen,* falls zusätzlich der Endpunkt von γ_r mit dem Anfangspunkt von γ_1 übereinstimmt.

Das Integral einer Funktion

$$f\colon D \to \mathbb{C}; \quad z = x + iy \mapsto u(x,y) + iv(x,y)$$

entlang eines Kurvenstücks $\gamma\colon [a,b] \to D$ kann ebenfalls in völliger Analogie zum RIEMANN-Integral definiert werden: Wir wählen eine Unterteilung

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = b$$

und betrachten dazu die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{N} f\left(\gamma(\tau_\nu)\right)\left(\gamma(t_\nu) - \gamma(t_{\nu-1})\right)$$

für geeignete Zwischenwerte

$$t_{\nu-1} \le \tau_\nu \le t_\nu\ ;$$

das Integral ist der Grenzwert, so er existiert, für immer feinere Unterteilungen.

Es wäre kein Problem, dies im einzelnen auszuführen und so zu einer exakten Definition des Integrals zu kommen, es geht allerdings schneller, wenn wir dies auf bekannte reelle Integrale zurückzuführen: Mit

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \quad \text{und} \quad \gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$$

ist

$$\begin{aligned}
&f\left(\gamma(\tau_\nu)\right)\left(\gamma(t_\nu) - \gamma(t_{\nu-1})\right)\\
&= \Big(u\left(\gamma(\tau_\nu)\right) + iv\left(\gamma(\tau_\nu)\right)\Big)\Big(\alpha(t_\nu) + i\beta(t_\nu) - \alpha(t_{\nu-1}) - i\beta(t_{\nu-1})\Big)\\
&= u\left(\gamma(\tau_\nu)\right)\left(\alpha(t_\nu) - \alpha(t_{\nu-1})\right) - v\left(\gamma(\tau_\nu)\right)\left(\beta(t_\nu) - \beta(t_{\nu-1})\right)\\
&\qquad + i\Big(u\left(\gamma(\tau_\nu)\right)\left(\beta(t_\nu) - \beta(t_{\nu-1})\right) + v\left(\gamma(\tau_\nu)\right)\left(\alpha(t_\nu) - \alpha(t_{\nu-1})\right)\Big)\\
&= \begin{pmatrix} u\left(\gamma(\tau_\nu)\right) \\ -v\left(\gamma(\tau_\nu)\right) \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \alpha(t_\nu) \\ \beta(t_\nu) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha(t_{\nu-1}) \\ \beta(t_{\nu-1}) \end{pmatrix}\right)\\
&\qquad + i\begin{pmatrix} v\left(\gamma(\tau_\nu)\right) \\ u\left(\gamma(\tau_\nu)\right) \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \alpha(t_\nu) \\ \beta(t_\nu) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha(t_{\nu-1}) \\ \beta(t_{\nu-1}) \end{pmatrix}\right)\ .
\end{aligned}$$

Damit können wir sowohl den Realteil als auch den Imaginärteil des komplexen Kurvenintegrals durch reelle Kurvenintegrale ausdrücken: Definieren wir den γ entsprechenden Weg in $\mathbb{R}^2$ als

$$\widetilde{\gamma}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix},$$

so konvergiert

$$\sum_{\nu=1}^{N} \begin{pmatrix} u\big(\gamma(\tau_\nu)\big) \\ -v\big(\gamma(\tau_\nu)\big) \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \alpha(t_\nu) \\ \beta(t_\nu) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha(t_{\nu-1}) \\ \beta(t_{\nu-1}) \end{pmatrix} \right)$$

für immer feiner werdende Unterteilungen (wenn überhaupt) gegen

$$\int_a^b \begin{pmatrix} u\big(\widetilde{\gamma}(t)\big) \\ -v\big(\widetilde{\gamma}(t)\big) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot\alpha(t) \\ \dot\beta(t) \end{pmatrix} dt = \int_{\widetilde{\gamma}} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} ds$$

und

$$\sum_{\nu=1}^{N} \begin{pmatrix} v\big(\gamma(\tau_\nu)\big) \\ u\big(\gamma(\tau_\nu)\big) \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \alpha(t_\nu) \\ \beta(t_\nu) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha(t_{\nu-1}) \\ \beta(t_{\nu-1}) \end{pmatrix} \right)$$

gegen

$$\int_a^b \begin{pmatrix} v\big(\widetilde{\gamma}(t)\big) \\ u\big(\widetilde{\gamma}(t)\big) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot\alpha(t) \\ \dot\beta(t) \end{pmatrix} dt = \int_{\widetilde{\gamma}} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} ds .$$

Daher bietet es sich an, das komplexe Kurvenintegral von vornherein über reelle Kurvenintegrale zu definieren:

Definition: Für

$$z = x + iy \quad \text{und} \quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

sowie ein Kurvenstück

$$\gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t) \quad \text{mit} \quad \widetilde{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}$$

ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz \underset{\text{def}}{=} \int_{\widetilde{\gamma}} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} ds + i \int_{\widetilde{\gamma}} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} ds .$$

Diese Definition läßt sich nicht nur auf Kurven*stücke* anwenden, sondern auch auf Kurven; wie üblich ist das Integral längs einer Kurve ist sowohl links als auch rechts gleich der Summe der Integrale längs der einzelnen Kurvenstücke.

Der zentrale Satz aus der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen ist der CAUCHYsche Integralsatz:

Satz: $f\colon D \to \mathbb{C}$ sei eine komplex differenzierbare Funktion und die geschlossene Kurve γ sei Rand einer offenen Teilmenge $G \subset D$, deren Abschluß $\overline{G}$ auch noch in D liege. Dann ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0 .$$

Beweis: Nach Definition ist

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\widetilde{\gamma}} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} ds + i \int_{\widetilde{\gamma}} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} ds ;$$

wir berechnen die rechts stehenden Integrale nach dem Satz von GREEN:

$$\int_{\widetilde{\gamma}} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} ds = \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx\,dy = -\iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx\,dy$$

und

$$\int_{\widetilde{\gamma}} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} ds = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx\,dy .$$

In beiden Fällen verschwindet rechts der Integrand nach den CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen. Also verschwinden die rechtsstehenden Integrale, und damit folgt die Behauptung. ■

c) Die Cauchysche Integralformel

Beim Beweis des CAUCHYschen Integralsatzes mußten wir die komplexe Differenzierbarkeit von D im gesamten Bereich D voraussetzen; nur so waren die Voraussetzungen für die Anwendung der GREENschen Formel gegeben. Tatsächlich liegt es nicht nur an der Beweismethodik, daß wir diese Voraussetyung brauchen, sondern der Satz kann definitiv falsch werden, wenn die Funktion auch nur in einem Punkt von D undefiniert ist.

Als Beispiel dazu betrachten wir die Funktion $f(z) = 1/z$ auf dem Einheitskreis

$$\gamma\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto e^{-it}$$

und fragen nach dem Integral

$$\int_\gamma f(z)\, dz\,.$$

Im Reellen würden wir ein Integral über $1/x$ berechnen, indem wir die Stammfunktion $\ln|x|$ an den Grenzen des Integrationsintervalls auswerten, und im wesentlichen genauso können wir auch hier vorgehen:

Lemma: Zur Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ gebe es eine komplex differenzierbare Funktion $F\colon D \to \mathbb{C}$, so daß $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in D$. Weiter sei γ eine in D liegende Kurve mit Anfangspunkt a und Endpunkt b. Dann ist

$$\int_\gamma f(z)\, dz = F(b) - F(a)\,.$$

Der *Beweis* geht genauso wie im Reellen: Für zwei sehr nahe beieinander liegende Punkte a und b und ihre Verbindungsstrecke γ ist

$$\int_\gamma f(z)\, dz \approx f(a) \cdot (b - a)\,.$$

Außerdem ist

$$f(a) = F'(a) \approx \frac{F(b) - F(a)}{b - a}\,,$$

also

$$f(a) \cdot (b - a) \approx F(b) - F(a)\,.$$

Damit gilt die Behauptung zumindest näherungsweise für sehr kleine Strecken.

Die allgemeine Behauptung folgt daraus wie im Reellen durch geeignete Abschätzungen.

■

Beim Integral über $1/z$ haben wir nun aber das Problem, daß $F(z) = \ln z$ zwar in jedem Punkt $z \neq 0$ die Ableitung $F'(z) = 1/z$ hat, daß aber der Logarithmus im Komplexen nicht als stetige Funktion auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiert werden kann. Problemlos ist die Definition auf $\mathbb{C}$ minus der negativen reellen Achse (einschließlich Null), und wenn wir die Kurve γ ein bißchen verkürzen, liegt sie ganz in diesem Definitionsbereich. Wir definieren daher eine verkürzte Kurve

$$\gamma_\varepsilon\colon [-\pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto e^{it}$$

und erhalten

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{dz}{z} = \ln e^{t(\pi-\varepsilon)} - \ln e^{i(-\pi+\varepsilon)} = i(\pi - \varepsilon) - i(-\pi + \varepsilon) = 2i(\pi - \varepsilon)\,.$$

Da dies für $\varepsilon \to 0$ gegen $2\pi i$ konvergiert, ist daher

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0\,.$$

Damit reicht also schon ein einziger Punkt von D, in dem $f(z)$ nicht definiert ist, um den CAUCHYschen Integralsatz nicht mehr anwendbar zu machen.

Dieses Beispiel läßt sich leicht etwas verallgemeinern: Zunächst können wir anstelle des Einheitskreises auch jeden anderen Kreis γ um den Nullpunkt betrachten, denn da

$$\ln(re^{it}) = \ln r + it$$

ist, hebt sich der Term $\ln r$ in obiger Rechnung einfach weg.

Als nächstes können wir den Nullpunkt durch einen anderen festen Punkt $w \in \mathbb{C}$ ersetzen; für einen Kreis

$$\gamma\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto w + re^{it} \quad \text{mit} \quad r > 0$$

ist dann

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-w} = 2\pi i$$

und noch etwas allgemeiner

$$\int_\gamma \frac{a}{z-w} = 2\pi i \cdot a \quad \text{für alle } a \in \mathbb{C}\,.$$

Noch allgemeiner sei $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine beliebige komplex differenzierbare Funktion und w ein innerer Punkt von D. Dann ist in einer Umgebung von w

$$f(z) = f(w) + (z-w)f'(w) + g(z)\,,$$

wobei $g(z)$ in einer Umgebung von w schneller gegen Null geht als $z-w$, d.h.

$$\lim_{z\to w} \frac{g(z)}{z-w} = 0\,.$$

Insbesondere ist also $\frac{g(z)}{z-w}$ auf ganz D definiert und komplex differenzierbar.

Damit ist

$$\frac{f(z)}{z-w} = \frac{f(w)}{z-w} + f'(w) + \frac{g(z)}{z-w}$$

und somit für einen in D liegenden Kreis um w

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz = \int_\gamma \frac{f(w)}{z-w}\,dz + \int_\gamma f'(w)\,dz + \int_\gamma \frac{g(z)}{z-w}\,dz\,.$$

Wie wir gerade gesehen haben, ist das erste Integral auf der rechten Seite gleich $2\pi i \cdot f(w)$, die beiden anderen verschwinden nach dem CAUCHYschen Integralsatz. Damit haben wir gezeigt

Cauchysche Integralformel: Für eine komplex differenzierbare Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ gilt für eine ganz in D liegende Kreisscheibe mit Mittelpunkt w und Randkurve γ

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz\,.$$

■

Diese Formel ist der Ausgangspunkt für eine ganze Reihe von weiteren Eigenschaften komplex differenzierbarer Funktionen, die hier nur angedeutet werden sollen.

Als erstes können wir den Integranden $f(z)/(z-w)$ nach w differenzieren; das Ergebnis ist

$$\frac{d^n}{dw^n}\frac{f(z)}{(z-w)} = \frac{n!\,f(z)}{(z-w)^{n+1}}\,.$$

Da sich Integration über z und Differentiation nach w gegenseitig nicht stören sollten, erwarten wir, daß für eine Funktion $h(z,w)$ zweier komplexer Veränderlicher gelten sollte

$$\frac{d}{dw}\int_\gamma h(z,w)\,dz = \int_\gamma \frac{\partial h}{\partial w}(z,w)\,dz\,,$$

und in der Tat zeigt eine einfache Rechnung, ausgehend von den Definitionen von Ableitung und Integral, daß dies sowohl im Reellen als auch im Komplexen richtig ist. Auf unsere Situation angewandt bedeutet dies, daß

$$\frac{d^n f}{dw^n}(w) = \frac{d^n}{dw^n}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz = n!\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}\,dz$$

ist.

Damit können wir also die n-te Ableitung von f berechnen, obwohl wir f nur als *einmal* differenzierbar vorausgesetzt haben! Wir haben also (mehr oder weniger) bewiesen, daß eine (einmal) komplex differenzierbare Funktion tatsächlich *beliebig oft* komplex differenzierbar ist – eine Aussage, die für reelle Differenzierbarkeit bekanntlich falsch ist. (Als Gegenbeispiele betrachte man etwa die Funktionen $f(x) = x^n\,|x|$.) Mehr noch: Da der Integrand

$$\frac{f(z)}{z-w} = \frac{f(z)}{z}\frac{1}{1-\frac{w}{z}} = \frac{f(z)}{z}\left(1 + \frac{w}{z} + \frac{w^2}{z} + \frac{w^3}{z} + \cdots\right)$$

zumindest für $z \neq 0$ in eine Potenzreihe entwickelbar ist und sich der Wert $z = 0$ durch geeignete Wahl des Integrationswegs γ leicht vermeiden läßt, kann man aus dem CAUCHYschen Integralsatz auch schließen, daß $f(w)$ in eine Potenzreihe entwickelt werden kann; sie kann also um jeden inneren Punkt ihres Definitionsbereichs in eine TAYLOR-Reihe entwickelt werden, die die Funktion in einer gewissen Umgebung auch darstellt – auch dies ein gewaltiger Unterschied zum Reellen, wo bekanntlich auch eine beliebig oft differenzierbare Funktion wie $f(x) = e^{-1/x^2}$ um den Nullpunkt nicht durch ihre (in diesem Fall identisch verschwindende) TAYLOR-Reihe dargestellt wird.

Eine genauere Untersuchung zeigt, daß für eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ auf einer offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{C}$ die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

- f ist komplex differenzierbar auf D.
- f ist beliebig oft komplex differenzierbar auf D.
- f kann um jeden Punkt von $z_0 \in D$ in eine TAYLOR-Reihe entwickelt werden; diese konvergiert mindestens in der größten offenen Kreisscheibe um z_0, die noch ganz in D liegt.
- Jedes Kurvenintegral $\int_\gamma f(z)\,dz$ über eine ganz in D verlaufende Kurve hängt nur ab vom Anfangs- und Endpunkt von γ.
- Jedes Kurvenintegral $\int_\gamma f(z)\,dz$ über eine ganz in D verlaufende geschlossene Kurve γ verschwindet.

Da eine komplex differenzierbare Funktion somit erheblich mehr ist als nur komplex differenzierbar, lohnt es sich, einen neuen Begriff einzuführen, der all dies zum Ausdruck bringen soll: Aus diesem Grund spricht man in der Funktionentheorie, d.h. der Theorie der Funktionen einer oder mehrerer komplexer Veränderlicher, statt von komplex differenzierbaren Funktionen meist von *holomorphen* Funktionen. In älteren Büchern ist stattdessen auch oft noch von *ganzen* Funktionen die Rede; woher diese Bezeichnung kommt, werden wir im nächsten Abschnitt sehen. Schließlich ist auch gelegentlich von *analytischen* Funktionen die Rede; dieser Begriff soll zum Ausdruck bringen, daß die Funktion um jeden Punkt ihres (offenen) Definitionsbereichs in eine TAYLOR-Reihe entwickelt werden kann. Dieser Ausdruck ist auch im Reellen gebräuchlich, allerdings ist dort die Analytizität eine erheblich stärkere Eigenschaft als die bloße Differenzierbarkeit, während hier im

Komplexen die beiden Eigenschaften äquivalent sind.

d) Der Residuensatz

Die Funktion $f(z) = 1/z$ ist natürlich nicht holomorph auf ganz $\mathbb{C}$, denn im Nullpunkt ist sie nicht einmal definiert. Genauso ist $g(z) = 1/(z-2)^2$ im Punkt 2 nicht definiert und damit erst recht nicht holomorph.

Trotzdem handelt es sich hier um relativ harmlose Ausnahmepunkte: Wenn wir $f(0) = g(2) = \infty$ setzen, haben wir das Verhalten der Funktion ziemlich genau beschrieben. Das Symbol „∞“ für Unendlich soll dabei *ein* Element bezeichnen, das wir zu $\mathbb{C}$ hinzunehmen. Die entstehende Menge $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist natürlich kein Körper mehr, denn beispielsweise ist

$$1 + \infty = \infty + \pi = 2\infty = i\infty = \infty \cdot e = \infty ,$$

so daß beispielsweise die Ausdrücke „$\infty - \infty$“ und „∞/∞“ nicht sinnvoll definiert sind. Außerdem ist hier im Komplexen $\infty = -\infty$, da wir ja nur *ein* Element zu $\mathbb{C}$ hinzugefügt haben. Dies unterscheidet das „komplexe ∞“ vom „reellen ∞“, denn im Reellen unterscheidet man bekanntlich sehr wohl zwischen $+\infty$ und $-\infty$. Hier im Komplexen, wo es keine Größerbeziehung gibt, wäre diese Unterscheidung jedoch sinnlos – es sei denn, wir würden für jeden Winkel φ ein eigenes Element $e^{i\varphi} \cdot \infty$ einführen, was wohl doch etwas zuviel des Guten wäre.

Das neue Element „∞“ ist also sicherlich nicht ganz unproblematisch; wir dürfen es auf keinen Fall als gleichberechtigt mit den gewöhnlichen komplexen Zahlen betrachten. Insbesondere dürfen wir nicht erwarten, daß wir mit *beliebigen* Funktionen $f\colon D \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sonderlich viel anfangen können; wir müssen uns beschränken auf Funktionen nach Art der beiden Eingangsbeispiele, bei denen die Stellen, an denen die Funktion unendlich wird, hinreichend isoliert sind und die Funktion außerhalb dieser Stellen holomorph ist:

Definition: Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ auf einer offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt *meromorph,* wenn gilt:

1. Die Menge $M \subseteq D$, auf der f den Wert ∞ annimmt, hat keine Häufungspunkte.

2. Die Einschränkung
$$f_{M\setminus D}\colon M\setminus D\to\mathbb{C};\qquad z\mapsto f(z)$$
ist holomorph.
3. Zu jedem Punkt $w\in M$ gibt es eine natürliche Zahl m, so daß $g(z)=(z-w)^n f(z)$ in einer Umgebung von w holomorph ist.

Die Punkte $w\in M$ heißen *Polstellen* von f; die kleinste Zahl $n\in\mathbb{N}$, für die *3.* gilt, heißt *Ordnung* der Polstelle w.

Es ist klar, daß die beiden Eingangsbeispiele meromorph sind im Sinne dieser Definitition: $f(z)=1/z$ hat genau einen Pol im Nullpunkt, d.h. $M=\{0\}$; dessen Ordnung ist eins. Entsprechend hat $g(z)=1/(z-2)^2$ einen Pol zweiter Ordnung in $w=2$ und ist in allen anderen Punkten von $\mathbb{C}$ holomorph.

Ein Beispiel einer meromorphen Funktion mit unendlich vielen Polstellen ist
$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})}\,.$$
Diese Funktion ist holomorph in allen Punkten, in denen der Cosinus nicht verschwindet, d.h. auf $\mathbb{C}\setminus M$ mit
$$M=\left\{\pi/2+k\pi\;\middle|\;k\in\mathbb{Z}\right\}.$$
Vom Reellen her wissen wir, daß
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$
ist; dies gilt auch im Komplexen, denn
$$\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\Big(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\Big)=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots\,.$$
Wegen der Beziehungen
$$\cos(z-\pi/2)=\sin z\quad\text{und}\quad\cos(z+\pi/2)=-\sin z$$
ist dann auch
$$\lim_{z\to-\pi/2}\frac{\cos z}{z+\pi/2}=1\quad\text{und}\quad\lim_{z\to\pi/2}\frac{\cos z}{z-\pi/2}=-1\,;$$

entsprechend auch an den um 2π verschobenen Stellen. Damit ist auch
$$\lim_{z\to-\pi/2}\frac{z+\pi/2}{\cos z}=1\quad\text{und}\quad\lim_{z\to\pi/2}\frac{z-\pi/2}{\cos z}=-1\,,$$
also auch
$$\lim_{z\to-\pi/2}(z+\pi/2)\frac{\sin z}{\cos z}=\sin\pi/2=1$$
und
$$\lim_{z\to\pi/2}(z-\pi/2)\frac{\sin z}{\cos z}=-\sin(-\pi/2)=1\,.$$
Somit hat der Tangens in den Punkten aus M Pole erster Ordnung, ist also auf ganz $\mathbb{C}$ meromorph.

(Hier bewährt sich wieder, daß wir nur *einen* Punkt ∞ betrachten: Es wäre nicht möglich, den Tangens in sinnvoller Weise als Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ zu definieren, denn an jeder Polstelle ist der Grenzwert von der einen Seite gleich $-\infty$ und von der andern gleich ∞.)

In gewisser Weise ist das oben durchgerechnete Beispiel der Funktion $1/z$ im wesentlichen die *einzige* Funktion, für die das der Fall ist: Für $n\geq 2$ hat $1/z^n$ die Stammfunktion $1/(n-1)z^{n-1}$, und die ist auf ganz $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ definiert, d.h.
$$\int_\gamma\frac{dz}{z^n}=0$$
nicht nur für die oben definierte Kurve, sondern für jede geschlossene Kurve, die nicht durch 0 geht.

...

Kapitel 4
Differentialgleichungen

Differentialgleichungen sind das wohl wichtigste mathematische Hilfsmittel für Anwendungen in Naturwissenschaft und Technik. Die dahinterstehende Grundidee ist einfach: Man kann zwar nur selten *a priori* sagen, wie sich ein System über einen längeren Zeitraum hinweg entwickeln wird, aber man hat oft aufgrund von Naturgesetzen eine klare Vorstellung über die Zustandsänderung *im nächsten Augenblick,* d.h. also über den Wert der zeitlichen Ableitung der Zustandsgrößen in Abhängigkeit vom gegenwärtigen Zustand des Systems. Ein einfaches Beispiel hierfür liefert das zweite NEWTONsche Gesetz, wonach die zeitliche Ableitung des Impuls eines Teilchens gleich der auf das Teilchen wirkenden Kraft ist.

Allgemein sei ein System beschrieben durch n zeitlich veränderliche Größen $y_1(t), \dots, y_n(t)$; unter einem System von Differentialgleichungen oder kurz einer Differentialgleichung verstehen wir eine Vorschrift, die die zeitlichen Ableitungen $\dot y_1(t), \dots, \dot y_n(t)$ aus den Funktionswerten berechnet:

$$\begin{aligned}\dot y_1(t) &= f_1\bigl(t, y_1(t), \dots, y_n(t)\bigr)\\ \dot y_2(t) &= f_2\bigl(t, y_1(t), \dots, y_n(t)\bigr)\\ \vdots\ &\ \ \vdots\\ \dot y_n(t) &= f_n\bigl(t, y_1(t), \dots, y_n(t)\bigr)\,.\end{aligned}$$

Falls die Funktionen f_i nur von $y_1(t), \dots, y_n(t)$ abhängen und nicht auch noch direkt von der Zeit t spricht man von einem *autonomen* System. Da Naturgesetze nicht von der Zeit abhängen, hat man es in wissenschaftlich-technischen Anwendungen meist mit autonomen Systemen zu tun; man kann allerdings auch den Einfluß von Umgebungsgrößen durch einen zeitabhängigen Term abschätzen und so ein nichtautonomes System erhalten.

Einige Leser werden bei dieser Form einer Differentialgleichung wohl die höheren Ableitungen vermissen, die ja in den Anwendungen auch oft eine Rolle spielen: Bei zeitlich konstanter Masse schreibt man etwa das oben erwähnte zweite NEWTONsche Gesetz meist als

$$\vec F = m\ddot{\vec s}(t)\,,$$

wobei $\vec s$ den Ortsvektor bezeichnet. Um dies auf obige Form zu bringen, muß man zusätzlich noch dessen Ableitung $\vec v(t) = \dot{\vec s}(t)$ betrachten und erhält dann das Differentialgleichungssystem

$$\dot{\vec v}(t) = \frac{1}{m}\vec F, \qquad \dot{\vec s}(t) = \vec v(t)$$

aus sechs Gleichungen.

§1: Homogene lineare Differentialgleichungen

Am einfachsten sind Differentialgleichungssysteme, bei denen die Funktionen f_i auf der rechten Seite linear in den $y_j(t)$ sind; im Fall eines autonomen Systems ist dann einfach

$$f_i\bigl(y_1(t), \dots, y_n(t)\bigr) = a_{i1}y_1(t) + \cdots + a_{in}y_n(t)\,.$$

Fassen wir die Funktionen $y_1(t)$ bis $y_n(t)$ zu einem Vektor $\vec y(t)$ zusammen und die Zahlen a_{ij} zu einer Matrix A, so kann die Differentialgleichung kurz als

$$\dot{\vec y}(t) = A \cdot \vec y(t)$$

geschrieben werden. Solche Differentialgleichungen bezeichnen wir als *lineare homogene Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.*

Im Fall $n = 1$ hat so eine Gleichung einfach die Form

$$\dot y(t) = ay(t)\,,$$

und wir wissen, daß für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$y(t) = \lambda e^{at}$$

dieser Differentialgleichung genügt. Damit kennen wir bereits *alle* Lösungen: Ist nämlich $y(t)$ irgendeine Lösungsfunktion, so können wir die neue Funktion

$$z(t) = y(t) \cdot e^{-at}$$

betrachten. Nach der LEIBNIZschen Produktregel ist

$$\dot{z}(t) = \dot{y}(t) \cdot e^{-at} + y(t) \cot(-a) e^{-at} ,$$

und das verschwindet, da $\dot{y}(t) = a \cdot y(t)$ ist. Also muß $z(t) = \lambda$ konstant sein und $y(t) = \lambda e^{at}$.

Im mehrdimensionalen Fall wollen wir ganz genauso vorgehen:

$$\dot{\vec{y}}(t) = A \cdot y(t) \Longrightarrow y(t) = e^{At} \cdot \vec{y}_0 .$$

Das Problem dabei ist, daß wir nicht wissen, was e^{At} sein soll; unsere erste Aufgabe ist es also, diesem Ausdruck eine Bedeutung zu geben.

a) Die Matrixexponentialfunktion

Wir orientieren uns wieder am Eindimensionalen: Für eine reelle Zahl x ist

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} ,$$

also setzen wir analog für eine $n \times n$-Matrix X

$$e^X \underset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \cdot X^i .$$

Damit ist klar, daß e^X eine $n \times n$-Matrix sein soll, und das erklärt auch, warum oben der Konstantenvektor $\vec{y}_0$ auf der rechten Seite steht. Was wir uns noch überlegen müssen, ist die Konvergenz der Reihe.

Dazu müssen wir die Größe der Einträge in den Matrizen X^i abschätzen: Sind allgemein A, B zwei $n \times n$-Matrizen und sind die Beträge aller Einträge von A kleiner oder gleich a und die von B kleiner oder gleich b, so kann es in AB offensichtlich keinen Eintrag geben, dessen Betrag größer ist als nab: Schließlich ist jeder Eintrag in der Produktmatrix

eine Summe von n Summanden, deren jeder Produkt je eines Eintrags von A und von B ist.

Um diese Formel leichter anwenden zu können, machen wir sie mutwillig schlechter und begnügen uns damit, daß jeder Eintrag von AB höchstens den Betrag $(na) \cdot (nb)$ hat.

Ist nun x der Betrag des größten Eintrags in der Matrix X, so folgt induktiv sofort, daß in X^i höchstens Zahlen bis zum Betrag $(nx)^i$ stehen können; in der endichen Teilsumme

$$\sum_{i=0}^{M} \frac{1}{i!} X^i$$

ist daher jeder Eintrag kleiner als

$$\sum_{i=0}^{M} \frac{(nx)^i}{i!} .$$

Letztere Summe konvergiert für $M \to \infty$ gegen e^{nx}, und damit muß auch die Matrixsumme konvergieren, denn die Reihe für e^{nx} ist konvergente Majorante eines jeden Eintrags. Insbesondere ist jeder Eintrag von e^X höchstens gleich e^{nx}.

Damit wissen wir also, daß die Matrix e^X für jede $n \times n$-Matrix X existiert; insbesondere ist die Funktion $t \mapsto e^{At}$ wohldefiniert.

Wir können natürlich nicht erwarten, daß die Matrixexponentialfunktion alle schönen Eigenschaften der gewöhnlichen Exponentialfunktion hat. Beispielsweise ist mur schwer vorstellbar, daß für beliebige Matrizen A und B gelten sollte $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$, denn wegen der Kommutativität der Matrizensumme, müßte dann auch $e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A$ sein, was zumindest unwahrscheinlich aussieht. In der Tat ist etwa für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^A = E + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad e^B = E + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und
$$e^A \cdot e^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ,$$
aber da das Quadrat von $C = A + B$ gleich der Einheitsmatrix ist, ist
$$\begin{aligned} e^{A+B} &= E + C + \frac{1}{2!} \cdot E + \frac{1}{3!} C + \cdots \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i)!} \right) \cdot E + \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)!} \right) \cdot C \\ &= \cosh(1) \cdot E + \sinh(1) \cdot C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e + e^{-1} & e - e^{-1} \\ e - e^{-1} & e + e^{-1} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Zum Glück gilt aber wenigstens

Lemma: Für zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $AB = BA$ ist
$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A .$$
Insbesondere ist für $s, t \in \mathbb{R}$
$$e^{A(s+t)} = e^{As} \cdot e^{At} .$$

Beweis: Für zwei reelle Zahlen x, y ist $e^{x+y} = e^x e^y = e^y e^x$; damit gilt dieselbe Formel auch für zwei reellwertige Variablen x und y. Wenn wir in allen Potenzreihen alle x- und y-Potenzen oberhalb der N-ten ignorieren, sagt die Gleichung aus, daß drei Polynome in x und y *als Polynome* identisch sind.

Beim Rechnen mit Polynomen in x und y verwendet man keine speziellen Eigenschaften dieser Variablen *außer, daß sie kommutieren.* Damit kann man in so eine Polynomidentität auch Matrizen einsetzen, und wenn diese miteinander kommutieren, erhält man auf beiden Seiten dasselbe Ergebnis. Damit ist für kommutierende Matrizen A, B stets
$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A .$$

Insbesondere kommutieren zwei skalare Vielfache derselben Matrix miteinander: $(sA)(tA) = st\,A^2$, und damit folgt auch die letzte Aussage des Lemmas. ■

Die für uns wichtigste Anwendung hiervon ist

Satz: Für jede $n \times n$-Matrix A ist die Funktion
$$\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n} \\ t \mapsto e^{At} \end{cases}$$
stetig differenzierbar mit Ableitung $t \mapsto A \cdot e^{At} = e^{At} \cdot A$.

Beweis: Die Ableitung ist definiert als
$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} .$$
Da die Matrizen At und Ah miteinander vertauschbar sind, ist nach dem gerade bewiesenen Lemma $e^{A(t+h)} = e^{At} \cdot e^{Ah}$, also
$$\frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} = e^{At} \cdot \frac{e^{Ah} - E}{h} .$$
Dabei ist
$$\frac{e^{Ah} - E}{h} = \frac{1}{h} \cdot \sum_{i=1} \infty \frac{(Ah)^i}{i!} = E + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(Ah)^i}{(i+1)!} .$$
Nach der obigen Diskussion ist jeder Eintrag der Matrix in der rechtsstehenden Summenmatrix höchstens gleich
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(ah)^i}{(i+1)!} = \frac{e^{ah} - 1}{h} ,$$
und der rechtsstehende Ausdruck geht für $h \to 0$ selbst gegen Null; wer das nicht gleich sieht, frage DE L'HOSPITAL. Damit ist
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(Ah)^i}{(i+1)!}$$
gleich der Nullmatrix und somit
$$\frac{d}{dt} e^{At} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} = e^{At} \cdot A .$$

Dies ist auch gleich $A\dot{e}^{At}$, denn da A mit jeder seiner Potenzen vertauschbar ist, ist es auch mit jeder endlichen Teilsumme der Reihe von e^{At} vertauschbar und damit auch mit e^{At} selbst. ■

Alles was uns jetzt noch fehlt zur Lösung eines linearen homogenen Differentialgleichungssystems sind Rechenregeln für den Umgang mit Ableitungen von Matrixfunktionen. Zumindest für Summen und Produkte gelten, wenn man von der Nichtkommutativität der Multiplikation absieht, die üblichen Regeln:

Lemma: $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ seien zwei matrixwertige Funktionen auf dem offenen Intervall (a,b). Dann ist

$$\frac{d}{dt}\big(f(t)+g(t)\big) = \dot{f}(t)+\dot{g}(t) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}\big((f(t)g(t)\big) = \dot{f}(t)\cdot g(t)+f(t)\cdot\dot{g}(t)\,.$$

Für einen konstanten Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\frac{d}{dt}\big(f(t)\cdot\vec{v}\big) = \dot{f}(t)\cdot\vec{v}\,.$$

Beweis: Für die Summe ist dies klar: Sind $f_{ij}(t)$ und $g_{ij}(t)$ die Komponenten der Matrizen f und g, so sind die Summen $f_{ij}(t) + g_{ij}(t)$ die Komponenten von $f + g$, und deren Ableitung ist die Summe der Ableitungen.

Die (i,j)-Komponenten von fg ist die Funktion

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_{i\nu}(t)\cdot g_{\nu j}(t)\,,$$

und deren Ableitung ist

$$\sum_{\nu=1}^{n} \dot{f}_{i\nu}(t)\cdot g_{\nu j}(t) f_{i\nu}(t)\cdot \dot{g}_{\nu j}(t)\,,$$

die (i,j)-Komponente von $\dot{f}(t)\cdot g(t) + f(t)\cdot\dot{g}(t)$.

Sind $v_1, \dots, v_n$ die Komponenten des Vektors $\vec{v}$, so ist die i-te Komponente der vektorwertigen Funktion $f(t)\cdot\vec{v}$ gleich der Summe

$$\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t)\cdot v_j \text{ mit Ableitung } \sum_{j=1}^{n} \dot{f}_{ij}(t)\,,$$

und das ist die i-te Komponente von $\dot{f}(t)\cdot\vec{v}$. ■

Damit haben wir alles zusammen und können zeigen

Satz: : Die sämtlichen Lösungen der Differentialgleichung $\dot{y} = Ay$ sind genau die Funktionen $t \mapsto e^{At}y_0$ mit $y_0 \in \mathbb{R}^n$.

Beweis: Da e^{At} die Ableitung Ae^{At} hat, ist die Ableitung von $f(t) = e^{At}\cdot\vec{y}_0$ nach der zuletzt bewiesenen Formel gleich $A\cdot e^{At}\cdot\vec{y}_0$, also in der Tat gleich $A\cdot f(t)$.

Nun sei $y\colon (a,b) \to \mathbb{R}^n$ irgendeine differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft, daß $\dot{y}(t) = A\cdot y(t)$ ist. Wir betrachten die Funktion $g(t) = e^{-At}\cdot y(t)$. Deren Ableitung ist

$$\dot{g}(t) = -A\cdot e^{-At}\cdot y(t) + e^{-At}\cdot\dot{y}(t) = -A\cdot e^{-At}\cdot y(t) + e^{-At}\cdot Ay(t) = \vec{0}\,,$$

denn die Matrix A ist mit e^{-At} vertauschbar. Damit haben alle Komponenten von g die Ableitung Null, sind also konstant und damit ist $g(t) \underset{\text{def}}{=} \vec{y}_0$ ein konstanter Vektor mit der Eigenschaft, daß

$$\vec{y}_0 = e^{-At}\cdot y(t), \quad d.h. \quad y(t) = e^{At}\cdot y_0\,,$$

wie behauptet. ■

Korollar: Für jeden Vektor $y_0 \in \mathbb{R}^n$ und jede reelle Zahl $t_0 \in \mathbb{R}$ gibt es genau eine differenzierbare Funktion $y(t)$ mit den Eigenschaften, daß $\dot{y}(t) = Ay(t)$ und $y(t_0) = y_0$ ist; dies ist $y(t) = e^{A(t-t_0)}\cdot y_0$. ■

Die Kombination aus Differentialgleichung und vorgegebenem Funktionswert an einer bestimmten Stelle bezeichnet man als *Anfangswertproblem.* In dieser Form treten Differentialgleichungen in Anwendungen meistens auf: Um die künftige Entwicklung eines Systems zu bestimmen, dessen Zustand durch n Meßgrößen $y_1(t), \dots, y_n(t)$ beschrieben wird, geht man aus vom (meßbaren) Zustand zu einem Zeitpunkt t_0, den Zahlen $y_1(t_0), \dots, y_n(t_0)$ also, und den Naturgesetzen, denen das System unterliegt. Letztere sind meist durch Differentialgleichungen ausdrückbar.

Wir können das obige Korollar auch etwas abstrakter interpretieren: Sind $y(t)$ und $z(t)$ zwei Lösungsfunktionen der Differentialgleichung $\dot{y}(t) = Ay(t)$, so ist auch jede Linearkombination $\alpha y(t) + \beta z(t)$ eine Lösung; die Lösungen bilden also einen Vektorraum. Obiges Korollar sagt uns, daß dieser Vektorraum die Dimension n hat und daß für jede reelle Zahl t_0 die Abbildung $y \mapsto y(t_0)$ ein Isomorphismus auf den $\mathbb{R}^n$ ist.

b) Lineare homogene Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

In der Elektrotechnik hat man es meist mit Differentialgleichungen der Art

$$y^n(t) + a_{n-1}y^{n-1}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + y_0 y(t) = 0 \qquad (*)$$

zu tun, oft auch noch mit einer Funktion $f(t)$ auf der rechten Seite, aber die hat natürlich im Paragraphen über *homogene* Differentialgleichungen noch nichts zu suchen.

Gleichung $(*)$ läßt sich leicht in die Theorie des vorigen Abschnitts einordnen; als Leitfaden kann das Beispiel des zweiten NEWTONschen Gesetzes am Beginn dieses Kapitels dienen: Dort hatten wir außer dem Weg noch die Geschwindigkeit als neue Variable eingeführt und konnten daraufhin alles mit ersten Ableitungen ausdrücken.

Im allgemeinen Fall gehen wir genauso vor: Wir betrachten die n Funktionen

$$y_1(t) \underset{\text{def}}{=} y(t), \quad y_2(t) \underset{\text{def}}{=} \dot{y}(t), \quad \ldots, \quad y_n(t) \underset{\text{def}}{=} y^{(n-1)}(t)\,;$$

diese erfüllen die Gleichung

$$\dot{y}_n(t) = -\big(a_{n-1}y^{n-1}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + y_0 y(t)\big)$$

sowie die Gleichungen

$$\dot{y}_1(t) = y_2(t), \quad \dot{y}_2(t) = y_3(t), \quad \ldots, \quad \dot{y}_{n-1}(t) = y_n(t)\,.$$

Diese bilden zusammen ein System, wie wir es im vorigen Paragraphen betrachtet haben, wir wissen also, daß es für jede Anfangsbedingung der Form

$$y(t) = y_1(t_0) = a_1, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_n(t_0) = a_n$$

genau eine Lösung gibt. Somit können wir den Funktionswert $y(t_0)$ sowie auch die Werte der ersten $n-1$ Ableitungen an einer Stelle t_0 vorgeben und haben dann genau eine Lösung der Differentialgleichung.

Im Prinzip wissen wir aus dem vorigen Abschnitt auch bereits, wie diese Lösung aussieht; da es allerdings nicht so verlockend erscheint, eine Matrixexponentialfunktion mit unseren derzeitigen Kenntnissen wirklich auszurechnen, wollen wir uns eine alternative Darstellung der Lösung überlegen.

Zumindest heuristisch erscheint es ganz plausibel, wenn wir Lösungen der Form $y(t) = e^{rt}$ erwarten, also lohnt sich zumindest der Versuch, eine solche Funktion in die Differentialgleichung $(*)$ einzusetzen. Da bei der Ableitung einer Exponentialfunktion einfach der Vorfaktor der Variablen nach vorne kommt, ist $y^{(k)}(t) = r^k e^{rt}$; falls $y(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung ist, muß also

$$\begin{aligned} &r^n e^{rt} + a_{n-1}r^{n-1}e^{rt} + \cdots + a_1 r e^{rt} + a_0 e^{rt} \\ &= (r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0)e^{rt} \end{aligned}$$

verschwinden; da e^{rt} nirgends verschwindet, kann dies nur passieren, wenn der Klammerinhalt zu Null wird.

Definition: Das Polynom

$$r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0$$

heißt *charakteristisches Polynom* der Differentialgleichung

$$y^n(t) + a_{n-1}y^{n-1}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0\,.$$

Dieses Polynom muß natürlich keine reelle Nullstelle haben; für die (wohlbekannte) Differentialgleichung $\ddot{y}(t) + y(t) = 0$ etwa ist es gleich $r^2 + 1$ und somit positiv für jedes reelle r.

Wir wissen aber, daß es nach dem Fundamentalsatz der Algebra n komplexe Nullstellen $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{C}$ gibt, so daß

$$r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = (r - r_1) \cdot \cdots \cdot (r - r_n)$$

ist.

Diese Nullstellen müssen selbstverständlich nicht alle verschieden sein; wir betrachten aber der Einfachheit halber zunächst den Fall, daß sie es sind.

Wir wissen, daß der Lösungsraum der Differentialgleichung $(*)$ ein n-dimensionaler Vektorraum ist, und wir haben bei lauter verschiedenen Wurzeln r_i insgesamt n Lösungsfunktionen gefunden. Diese Funktionen sind zwar nicht notwendigerweise reell, aber wenn ein Polynom mit reellen Koeffizienten eine komplexe Nullstelle hat, muß auch die konjugiert komplexe Zahl eine Nullstelle sein, d.h. die komplexen Nullstellen kommen in Paaren konjugiert komplexer Zahlen

$$r = u + iv \quad \text{und} \quad \overline{r} = u - iv\,,$$

und wir können anstelle der beiden kompexen Lösungen

$$e^{rt} = e^{ut}(\cos vt + i\sin vt) \quad \text{und} \quad e^{\overline{r}t} = e^{ut}(\cos vt - i\sin vt)$$

die beiden reellen Lösungen

$$\frac{e^{re} + e^{\overline{r}t}}{2} = e^{ut}\cos vt \quad \text{und} \quad \frac{e^{re} - e^{\overline{r}t}}{2i} = e^{ut}\sin vt$$

betrachten. Wir haben somit in jedem Fall n verschiedene reelle Lösungsfunktionen.

Angenommen, diese n Funktionen seien linear abhängig. Dann können wir eine nichttriviale Linearkombinination dieser Funktionen finden, die identisch verschwindet. Wir wählen unter den eventuell mehreren solchen Linearkombinationen eine, in der so wenige wie möglich der n Funktionen mit von Null verschiedenem Koeffizienten vorkommen. Diese Linearkombination multiplizieren wir mit e^{-u_0t}, wobei u_0 der größte Realteil eines vorkommenden r_i sei. Beim Grenzübergang $t \to \infty$ gehen dann alle Terme mit $\Re r_i \neq u_0$ gegen Null, übrig bleiben nur noch die Terme mit $\Re r_i = u_0$. Falls es nur einen solchen Term gibt, folgt, daß dieser mit Koeffizient Null auftreten muß, im Widerspruch zur angenommenen Minimalität der Linearkombination. Andernfalls bleibt eine Linearkombination von Sinus- und Cosinustermen zu verschiedenen Frequenzen. Ersetzt man hier t durch $-t$ und addiert *bzw.* subtrahiert die entstehende und die ursprüngliche Linearkombination, sieht man, daß auch schon die Cosinusterme für sich

alleine genommen (zusammen mit einer eventuellen Konstanten) und die Sinusterme für sich alleine genommen linear abhängig sind. Ein kurzer Blick auf das FOURIER-Integral zeigt, daß dies absurd ist.

Also sind die n Lösungsfunktionen linear unabhängig und bilden somit eine Basis des Lösungsraums. Damit läßt sich die allgemeine Lösung nach Auflösung der charakteristischen GLeichung also leicht angeben, und wir müssen keine Matrixexponentialfunktion berechnen. Bei Anfangswertproblemen muß allerdings noch ein lineares Gleichungssystem gelöst werden, um die richtigen Koeffizienten zu ermitteln.

Bleibt noch der Fall mehrfacher Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

...

c) Berechnung der Matrixexponentialfunktion

Im allgemeinen Fall eines linearen homogenen Differentialgleichungssystems sind wir leider nicht in der glücklichen Lage, daß wir die Berechnung von e^{At} vermeiden können; wir müssen uns daher überlegen, wie wir diese Matrix am besten ausrechnen.

Zumindest ein Fall ist problemlos: Ist nämlich

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix, ist offensichtlich

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{d_1t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{d_2t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{d_nt} \end{pmatrix}$$

wieder eine Diagonalmatrix, wobei die Exponentialfunktion einfach komponentenweise auf die Diagonaleinträge ihres Arguments angewandt wird.

Diagonalmatrizen treten leider eher selten auf; wir können eine gegebene Matrix aber, wenn wir sie bezüglich der richtigen Basis betrachten, erheblich vereinfachen: Falls beispielsweise die algebraische Vielfachheit eines jeden Eigenwerts gleich seiner geometrischen Vielfachheit ist, hat der $\mathbb{R}^n$ eine Basis aus Eigenvektoren der Matrix, und bezüglich dieser Basis hat die Matrix Diagonalgestalt. Ist B die Matrix des Basiswechsels, ist also $D = B^{-1}AB$ eine Diagonalmatrix. Nach dem Distributivgesetz ist

$$B^{-1}(A_1 + A_2)B = B^{-1}A_1B + B^{-1}A_2B ,$$

und entsprechendes gilt natürlich für jede endliche Summe von Matrizen. Außerdem ist

$$B^{-1}(A_1 \cdot A_2)B = B^{-1}A_1B \cdot B^{-1}A_2B$$

und

$$B^{-1}A_1^mB = (B^{-1}A_1B)^m ,$$

also im Limes auch

$$B^{-1}e^AB = e^{B^{-1}AB} \quad \text{und} \quad e^A = Be^{B^{-1}AB}B^{-1} .$$

Zumindest für eine diagonalisierbare Matrix ist also die Exponentialfunktion nicht schwieriger als die Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren und die Transformation der Matrix in ihre Diagonalgestalt.

Insbesondere gibt es also keine großen Probleme mit Matrizen, die lauter verschiedene Eigenwerte haben; dann sind die Lösungen des Differentialgleichungssystems allesamt Linearkombinationen der Funktionen $e^{\lambda_i t}$, wobei λ_i die Eigenwerte der Matrix sind. Dies sieht fast genauso aus wie im vorigen Abschnitt, und in der Tat ist das dort definierte charakteristische Polynom (von einem eventuellen Vorzeichenfaktor abgesehen) nichts anderes als das charakteristische Polynom der Matrix des zugehörigen Differentialgleichungssystems.

Am besten sieht man, was passiert, wenn man das ursprüngliche Differentialgleichungssystem transformiert auf das Koordinatensystem

es $\mathbb{R}^n$, das der Eigenwertbasis entspricht. Die entsprechenden Linearkombinationen z_j der y_i erfüllen dann Differentialgleichungen der Form

$$\dot{z}_j = \lambda_j z_j ,$$

wobei λ_j der zu z_j gehörende Eigenwert von A ist. Damit ist natürlich $z_j = a_j e^{\lambda_j t}$, und die y_i lassen sich durch Rücktransformation zur Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ als Linearkombinationen der z_j berechnen.

Falls auch Eigenwerte auftreten, deren geometrische Vielfachheit kleiner ist als die algebraische, können wir nicht so argumentieren; dann können wir A nicht auf eine Diagonalmatrix transformieren, sondern nur auf eine Dreiecksmatrix.