Wolfgang K. Seiler
Tel. 5385

A5, C 201

13. Juni 1997

9. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: k sei ein Körper und für $\vec{a} \in k^n$ sei $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$. Dann ist $\vec{a} = \vec{0}$.

2) Zeigen Sie: Für $A \in k^{n\times m}$ und $B \in k^{m\times p}$ ist ${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$

3) Richtig oder falsch: Ein homogenes lineares Gleichungssystem aus n Gleichungen in $m > n$ Variablen hat Lösungen, bei denen mindestens $m - n$ der Variablen frei wählbar sind.

4) Richtig oder falsch: $A, B \in k^{n\times n}$ seien Matrizen und der Rang von A sei n. Dann gibt es eine Matrix $X \in k^{n\times n}$, so daß $AX = B$ ist.

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

a) Bestimmen Sie über $k = \mathbb{Q}$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & + & 6x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & & & = & 2\,. \end{array}$$

b) Geben Sie eine ganzzahlige Lösung an. *(Hinweis: Es gibt eine mit einstelligen x_i.)*

c) Gibt es eine Lösung mit natürlichen Zahlen x_i ?

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*
Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in k$ die Lösungsmenge von

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & ax_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & (a+1)x_2 & & & - & x_4 & = & 8-9a \\ -2x_1 & - & 2ax_2 & - & ax_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ -2x_1 & - & 2ax_2 & - & 3ax_3 & + & 4x_4 & = & 4 \end{array}$$

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*
Bestimmen Sie, soweit möglich, die inversen Matrizen zu

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

und geben Sie gegebenenfalls an, unter welchen Bedingungen an $a, b, c \in k$ die angegebenen Matrizen *nicht* invertierbar sind.

Abgabe bis zum Freitag, dem 20. Juni 1997 um 10.15 Uhr