Wolfgang K. Seiler
Tel. 5385

A5, C 201

6. Juni 1997

8. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Falls die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a}\times\vec{b}$ in $\mathbb{R}^3$ alle dieselbe Länge haben, stehen sie paarweise senkrecht aufeinander.

2) Richtig oder falsch: Ist $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}$, so sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel.

3) Zeigen Sie: Für beliebige reelle Zahlen ist $(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \le \left(\sum_{i=1}^3 a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^3 b_i^2\right)$.

4) Richtig oder falsch: Für $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ gilt: $A^2=0 \Rightarrow A=0$.

5) Richtig oder falsch: Für $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ gilt: $A^2=A \Rightarrow A=E$.

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$ seien reelle Vektoren.

a) Berechnen Sie $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ aus den Komponenten der drei beteiligten Vektoren.

b) Zeigen Sie: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ ist das Volumen des Körpers mit den Ecken $\vec{0},\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{a}+\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\vec{a}+\vec{c}$ und $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

c) Drei Vektoren $\vec{a},\vec{b}$ und $\vec{c}$ liegen genau dann in einer Ebenen, wenn $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$ ist.

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß die Matrix $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$ der Gleichung $A^3-4A^2+3A=E$ genügt.

b) Benutzen Sie das Resultat aus *a)*, um eine Matrix B zu finden mit der Eigenschaft, daß $AB=BA=E$.

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Bestimmen Sie alle 2×2-Matrizen A mit der Eigenschaft $A\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}A$.

b) Zeigen Sie: Falls die $n\times n$-Matrix A mit allen $n\times n$-Matrizen B vertauschbar ist, d.h. $AB=BA$, dann ist A ein skalares Vielfaches der Einheitsmatrix. (*Hinweis:* Betrachten Sie insbesondere solche Matrizen B, für die nur ein einziger Eintrag ungleich Null ist.)

Abgabe bis zum Freitag, dem 13. Juni 1997 um 10.15 Uhr