WOLFGANG K. SEILER
Tel. 5385

A5, C 201

17. Oktober 1997

Nachklausur und 13. Übungsblatt Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte unbedingt auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Berechnen Sie die komplexe Zahl $(1+i)^{20}$.

2) Berechnen Sie den Hauptwert und die sonstigen Werte von $\ln(1+i)$!

3) Richtig oder falsch: In der Fourierreihe zu $f(t) = |\sin t|^{1997}$ treten keine Cosinusterme auf.

4) Welche Dimension hat der Vektorraum aller schiefsymmetrischer reeller 3×3-Matrizen? (Zur Erinnerung: A heißt schiefsymmetrisch, wenn ${}^tA = -A$ ist.)

5) Richtig oder falsch: Faßt man $\mathbb{C}$ als zweidimensionalen Vektorraum über $\mathbb{R}$ auf, ist die Abbildung $z \mapsto \mathfrak{Im}\, z$ linear.

6) Richtig oder falsch: Die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix A verschwindet genau dann, wenn A mindestens eine Null in der Hauptdiagonalen hat.

7) Die reelle 2×2-Matrix A habe den Eigenwert i. Was können Sie über die weiteren Eigenwerte von A sagen?

Aufgabe 1: (*6 Punkte*)

a) Zeigen Sie, daß das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ existiert und berechnen Sie seinen Wert!

b) Folgern Sie daraus mit Hilfe geeigneter RIEMANNscher Untersummen, daß $\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{x^2}$ existiert und kleiner als zwei ist!

c) Wie verbessert sich Ihre Abschätzung, wenn Sie von $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2}$ ausgehen?

Aufgabe 2: (*14 Punkte*)
Berechnen Sie, soweit dies sinnvoll ist, die Werte der folgenden Integrale. Bestimmen Sie gegebenenfalls auch den CAUCHYschen Hauptwert.

a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} 4(\sin x)^{1997}\,dx$ *b)* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,dx$ *c)* $\displaystyle\int_{-5}^{0} |\cos \pi x|\,dx$ *d)* $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^4}$ *e)* $\displaystyle\int_{-3}^{2} \frac{36\,dx}{x^2}$

f) $\displaystyle\int_{5\pi}^{10\pi} e^{ix}\,dx$ *g)* $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{dx}{x^2-25}$ *h)* $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{2x+1}{x^2+x-2}\,dx$ *i)* $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{6x+3}{x^2+x+1}$

• • • **B I T T E W E N D E N !** • • •

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

Berechnen Sie die TAYLOR-Polynome dritten Grades für die folgenden Funktionen:

a) $\sin x^2$ *b)* $\ln\left((1+x)^{1997}\right)$ *c)* $\log_2(1+x)$

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*

Berechen Sie über die EULERschen Formeln den Ausdruck

$$\sin(2x)\cdot\tan x+\cos(2x)\ \ !$$

(Vergessen Sie nicht, dabei auf eventuelle Kürzungsmöglichkeiten zu achten! Das Endergebnis ist sehr kurz!)

Aufgabe 5: *(5 Punkte)*

Die Funktion

$$f\colon [0,2\pi)\to\mathbb{R};\quad t\mapsto\frac{\pi-t}{2}$$

werde über die Bedingung $f(t+2\pi)=f(t)$ periodisch fortgesetzt auf ganz $\mathbb{R}$.

a) Skizzieren Sie die Funktion $f(t)$ für $-3\pi\le t\le 3\pi$!

b) Berechnen Sie die (reelle oder komplexe) FOURRIERreihe von $f(t)$!

Aufgabe 6: *(8 Punkte)*

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a\in\mathbb{R}$ die Lösungsmenge von

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & ax_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1\\ x_1 & + & (a+1)x_2 & & & - & x_4 & = & 8-9a\\ -2x_1 & - & 2ax_2 & - & ax_3 & + & 3x_4 & = & 1\\ -2x_1 & - & 2ax_2 & - & 3ax_3 & + & 4x_4 & = & 4 \end{array}$$

Aufgabe 7: *(5 Punkte)*

Bestimmen Sie alle Werte $a\in\mathbb{R}$, für die die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & a\\ 3 & -4 & a & 0\\ 0 & a & -1 & 0\\ a & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

nicht invertierbar ist!

Aufgabe 8: *(6 Punkte)*

Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2\\ -2 & 2 & -3\\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$!

Abgabe bis zum Freitag, dem 17. Oktober 1997, um 13.00 Uhr