WOLFGANG K. SEILER
Tel. 5385

A5, C 201

4. Juli 1997

12. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: A sei eine $n \times n$-Matrix vom Rang n. Dann ist die Lösung x_i des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ eine lineare Funktion von $\vec{b}$.

2) Richtig oder falsch: $\det A = 0 \Leftrightarrow 0$ ist Eigenwert von A.

3) Richtig oder falsch: Eine lineare Abbildung ist genau dann injektiv, wenn Null keiner ihrer Eigenwerte ist.

4) Richtig oder falsch: Die Funktion $f(x) = e^{2x}$ ist ein Eigenvektor der linearen Abbildung $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R});\ f \mapsto f'$.

5) Bestimmen Sie den Eigenraum der linearen Abbildung $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R});\ f \mapsto f''$ zum Eigenwert $a > 0$.

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$!

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

a) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei eine invertierbare Matrix mit der Eigenschaft, daß sowohl A als auch A^{-1} nur ganzzahlige Einträge haben. Zeigen Sie: Dann ist $\det A = \pm 1$. *(Hinweis:* $AA^{-1} = E$.*)*

b) Ist umgekehrt A eine Matrix mit ganzzahligen Einträgen und ist $\det A = \pm 1$, so ist A invertierbar, und auch die inverse Matrix hat nur ganzzahlige Einträge. *(Hinweis: Hier kann z.B. die* CRAMER*sche Regel nützlich sein.)*

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren in $\mathbb{C}^2$ für die Matrix $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

b) Bestimmen Sie die Matrix eines Basiswechsels in $\mathbb{C}^2$, der A zur Diagonalmatrix macht.

Abgabe bis zum Freitag, dem 11. Juli 1997, um 10.15 Uhr