Wolfgang K. Seiler
Tel. 5385 A5, C 201

28. Juni 1997

Klausur und 11. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Berechnen Sie die komplexe Zahl $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2000}$.

2) Berechnen Sie den Hauptwert und die sonstigen Werte von $\ln\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$!

3) Richtig oder falsch: In der Fourierreihe zu $f(t) = |\sin t|^{1997}$ treten keine Cosinusterme auf.

4) Richtig oder falsch: Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt es eine symmetrische Matrix B und eine antisymmetrische Matrix C derart, daß $A = B + C$ ist.

5) Richtig oder falsch: Faßt man $\mathbb{C}$ als zweidimensionalen Vektorraum über $\mathbb{R}$ auf, ist die Abbildung $z \mapsto |z|$ linear.

6) $V = \left\{a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0 \mid a_i \in \mathbb{R}\right\}$ sei der Vektorraum aller Polynome vom Grad kleiner oder gleich n. Bestimmen Sie Kern und Bild der linearen Abbildung $V \to V; f \mapsto f''$!

7) Richtig oder falsch: Im Vektorraum $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ aller stetiger Funktionen sind die Elemente $\sin^2$ und $\cos^2$ linear abhängig.

Bearbeiten Sie bitte jede der folgenden Aufgaben auf einem eigenen Blatt, da die verschiedenen Aufgaben von verschiedenen Personen korrigiert werden.
• • • Schreiben Sie unbedingt auf jedes Blatt Ihren Namen! • • •

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

a) Berechnen Sie über geeignete Riemannsche Ober- und Untersummen für $\int_a^b \frac{dx}{x}$ eine obere und eine untere Schranke für

$$S_n \underset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \quad !$$

b) Machen Sie damit eine Aussage über den Wert von $S_{1\,000\,000}$!

Aufgabe 2: *(14 Punkte)*
Berechnen Sie, soweit dies sinnvoll ist, die Werte der folgenden Integrale. Bestimmen Sie gegebenenfalls auch den Cauchyschen Hauptwert.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} |\sin \pi x|\,dx$ *b)* $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} 4(\sinh x)^3\,dx$ *c)* $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{dx}{x^2}$ *d)* $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^3}$ *e)* $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{2x+1}{x^2+x-2}\,dx$

f) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{3x+1}{3x^2+2x+7}\,dx$ *g)* $\displaystyle\int_{3}^{4} \frac{dx}{(x-2)(x-5)}$ *h)* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,dx$ *i)* $\displaystyle\int_{1}^{\pi+1} e^{2ix}\,dx$

• • • B I T T E W E N D E N ! • • •

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*

Berechnen Sie die TAYLOR-Polynome dritten Grades für die folgenden Funktionen:

a) $\tan x$ *b)* $\ln(2+x)$ *c)* $\log_{10}(2+x)$

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*

Beweisen Sie über die EULERschen Formeln die Beziehung

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x}\,.$$

Aufgabe 5: *(5 Punkte)*

Die Funktion

$$f\colon (-\pi,\pi] \to \mathbb{R}; \quad f(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } -\pi/2 \le t \le \pi/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

werde über die Bedingung $f(t+2\pi) = f(t)$ periodisch fortgesetzt auf ganz $\mathbb{R}$.

a) Skizzieren sie die Funktion $f(t)$ für $-5\pi \le t \le 5\pi$!

b) Berechnen Sie die (reelle oder komplexe) Fourierreihe von $f(t)$!

Aufgabe 6: *(6 Punkte)*

Finden Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & y & & & = & 3 \\ & & ay & - & 8z & = & 2\,. \\ 3ax & + & y & + & az & = & 3 \end{array}$$

Aufgabe 7: *(7 Punkte)*

a) Eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ heißt *Projektion* (auf elektrotechnisch *Filter*), wenn $\varphi \circ \varphi = \varphi$ ist. Zeigen Sie, daß es für einen endlichdimensionalen Vektorraum V und eine Projektion $\varphi\colon V \to V$ eine Basis $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$ von V und ein $j \in \mathbb{N}$ gibt, so daß

$$\varphi(\vec{b}_i) = \begin{cases} \vec{0} & \text{für } i < j \\ \vec{b}_i & \text{für } i \ge j \end{cases}\,.$$

b) Für die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \vec{0}, \quad \varphi\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\,.$$

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ sowie deren Quadrat.

Aufgabe 8: *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 3 \\ -3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$ für beliebiges $a \in \mathbb{R}$.

b) Für welche Werte von a ist die Matrix invertierbar?

c) Berechnen Sie A^{-1} für den Fall $a = 1$.

Abgabe bis zum Samstag, dem 28. Juni 1997, um 13.00 Uhr