Wolfgang K. Seiler
Tel. 5385

A5, C 201

20. Juni 1997

10. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Jede einelementige Teilmenge eines Vektorraums ist linear unabhängig.

2) Richtig oder falsch: Die Abbildung $\varphi\colon k^2 \to k;\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto xy$ ist linear.

3) Richtig oder falsch: $\varphi\colon V \to W$ sei eine lineare Abbildung und für $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r \in V$ seien $\varphi(\vec{v}_1), \dots, \varphi(\vec{v}_r)$ linear unabhängig. Dann sind auch $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r$ linear unabhängig.

4) Richtig oder falsch: Eine n-elementige Teilmenge $\mathcal{B} \subset k^n$ ist genau dann eine Basis, wenn sie linear unabhängig ist.

5) Bestimmen Sie Kern und Bild der linearen Abbildung $\varphi\colon \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R});\ f \mapsto f'$!

Aufgabe 1: (*6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie zur Matrix $A = \begin{pmatrix} \frac12 & \frac13 & \frac14 \\ \frac13 & \frac14 & \frac15 \\ \frac14 & \frac15 & \frac16 \end{pmatrix}$ Dreiecksmatrizen L, R mit $LA = R$.

b) Berechnen Sie A^{-1} mit Hilfe dieser Matrizen.

Aufgabe 2: (*4 Punkte)*

Bestimmen Sie Kern und Bild der linearen Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4; \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_3 - x_4 \\ x_4 - x_1 \end{pmatrix} \quad !$$

Aufgabe 3: (*5 Punkte)*

Im Vektorraum aller stetiger Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei U der von

$$M = \{1\} \cup \left\{ \sin^\ell z,\ \cos^\ell z \;\middle|\; 1 \le \ell \le n \right\} = \{1, \sin z, \cos z, \sin^2 z, \cos^2 z \dots, \sin^n z, \cos^n z\}$$

erzeugte Untervektorraum, d.h. $U \underset{\text{def}}{=} [M]$.

a) Bestimmen Sie eine Basis von U! *(Hinweis: Die Basisvektoren müssen nicht in* M *liegen und müssen keine reellen Funktionen sein.)*

b) Was ist $\dim_{\mathbb{C}} U$?

c) Bestimmen Sie Kern und Bild der linearen Abbildung $\varphi\colon U \to \mathbb{C};\quad f \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt$!

Abgabe bis zum Freitag, dem 27. Juni 1997, um 10.15 Uhr