Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

B6,26, A4.18

6. Juni 2019

Modulklausur Funktionentheorie I

• • • Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen! • • •
• • • Die Aufgaben müssen *nicht* in der angegebenen Reihenfolge • • •
• • • bearbeitet werden; konzentrieren sie sich zunächst • • •
• • • auf das, womit sie schnell Punkte holen können! • • •

Aufgabe 1: *(10 Punkte)*
Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen, die den angegebenen Gleichungen genügen, und geben Sie die Ergebnisse in der Form $x + iy$ an mit $x, y \in \mathbb{R}$:

a) $z = (2+3i)(4i-1)$ *b)* $z = \dfrac{2+3i}{4i-1}$ *c)* $z^2 - 2z + 4 - 2i + 2iz = 0$ *d)* $z^2 = i^{99}$ *e)* $z^8 = 1$

Aufgabe 2: *(12 Punkte)*

a) Entscheiden Sie für jede der angegebenen Teilmengen von $\mathbb{C}$, welche der Eigenschaften *offen, abgeschlossen, zusammenhängend, kompakt* sie hat! Falls es sich um ein Gebiet handelt, geben Sie bitte an, ob es einfach zusammenhängend ist. Alle Aussagen müssen begründet werden!

$M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathfrak{Re}\, z| > 1\}$ $M_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathfrak{Re}\, z| \le 1\}$ $M_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$
$M_4 = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \le |z| < 1\}$ $M_5 = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ $M_6 = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \le |z| \le 1\}$

b) Beantworten Sie die entsprechenden Fragen auch für $M = \widehat{\mathbb{C}}$!

Aufgabe 3: *(8 Punkte)*
Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen irgendwo holomorph sind, und geben Sie gegebenenfalls das größtmögliche Teilgebiet G von $\mathbb{C}$ an, auf dem dies der Fall ist! Untersuchen Sie auch, ob die jeweilige Funktion in den Punkten, in denen sie nicht holomorph ist, meromorph ist!

a) $f(z) = \dfrac{\sin z}{e^z - e^{-z}}$ *b)* $f(z) = e^{1/z^2}$ *c)* $f(z) = \dfrac{|\sin z|}{\cos z}$ *d)* $f(z) = \dfrac{z^3 - 6z^2 + 11z - 6}{z^2 - 4}$

Begründen Sie ihre Aussagen!

Aufgabe 4: *(15 Punkte)*
D sei die Kreisscheibe mit Radius zwei um den Nullpunkt, und γ sei der Streckenzug vom Punkt $-2+2i$ zu den Punkten $-2-2i$, $2+2i$, $2-2i$ und zurück zu $-2+2i$.

a) Ist γ eine Jordan-Kurve?

b) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$I_1 = \int_\gamma \cos z\, dz, \qquad I_2 = \int_\gamma \mathfrak{Re}\, z\, dz\,, \qquad I_3 = \int_{\partial D} \frac{dz}{\sin z}\,, \qquad I_4 = \int_\gamma \frac{dz}{\cos z}\,, \qquad I_5 = \int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}$$

• • • **Bitte wenden!** • • •

Aufgabe 5: *(5 Punkte)*
Zeigen Sie, daß die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - 5x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 3x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 99x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$$

alle drei den gleichen Wert haben, und berechnen Sie diesen!

Aufgabe 6: *(3 Punkte)*

a) Was ist der Hauptwert des Logarithmus von i?

b) Welche Werte kann $\log i$ annehmen, wenn Sie einen anderen Zweig des Logarithmus verwenden?

c) Die Funktion $z \mapsto i^z$ sei über irgendeinen Zweig des Logarithmus definiert. Welche Werte kann i^i annehmen?

Aufgabe 7: *(7 Punkte)*

a) Bestimmen Sie alle meromorphen Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ mit $f(1/n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$!

b) Finden Sie meromorphe Funktionen $f, g\colon \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ mit der Eigenschaft

$$f(2n) = \prod_{k=1}^{n} (2k) \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad g(2n+1) = \prod_{k=0}^{n} (2k+1) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0\,!$$

c) Sind f und g durch die Bedingungen in *b)* eindeutig bestimmt?

d) Ist $\Gamma(z)$ beschränkt im Streifen $0 \le \mathfrak{Re}\, z \le 1$?

e) Ist $\Gamma(z)$ beschränkt im Streifen $5 \le \mathfrak{Re}\, z \le 7$?