Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

16. April 2019

Modulklausur Elemente der Funktionentheorie

Aufgabe 1: *(10 Punkte)*
Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + iy$:

a) $(1+3i)(2i-1)$ *b)* $\dfrac{2+3i}{2i+3}$ *c)* $\left(1+\sqrt{-3}\right)^3$ *d)* $\dfrac{(1+\sqrt{-3})^{99}}{2^{99}}$ *e)* $e^{\pi i/4}$

Lösung:

a) $(1+3i)(2i-1) = -7-i$

b) $\dfrac{2+3i}{2i+3} = \dfrac{(2+3i)(3-2i)}{2^2+3^2} = \dfrac{12+5i}{13} = \dfrac{12}{13} + \dfrac{5}{13}i$

c) $\left(1+\sqrt{-3}\right)^3 = 1+\binom{3}{1}\sqrt{-3}+\binom{3}{2}\left(\sqrt{-3}\right)^2+\left(3\sqrt{-3}\right)^3 = 1+3\sqrt{-3}+3\cdot(-3)+(-3)\cdot\sqrt{-3} = -8$

d) Nach *c)* ist $\dfrac{\left(1+\sqrt{-3}\right)^{99}}{2^{99}} = \dfrac{(-8)^{33}}{2^{99}} = \dfrac{-2^{99}}{2^{99}} = -1$

Alternativ: $\dfrac{\left(1+\sqrt{-3}\right)^{99}}{2^{99}} = \left(\dfrac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)^{99}$ und wegen *c)* ist die dritte Potenz der Klammer gleich -1. Das Ergebnis ist also $(-1)^{33} = -1$.

e) $e^{\pi i/4} = \cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ ist eine (primitive) achte Einheitswurzel.

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*
Bestimmen Sie jeweils alle $z \in \mathbb{C}$, die den folgenden Gleichungen genügen:

a) $z^2 - 8z + 25 = 0$

Lösung: $z^2 - 8z + 25 = (z-4)^2 + 9 = 0 \iff (z-4)^2 = -9 \iff z = 4 \pm 3i$

b) $z^2 + 8iz + 9 = 0$

Lösung: $z^2 + 8iz + 9 = (z+4i)^2 + 25 = 0 \iff (z+4i)^2 = -25 \iff z = -4i \pm 5i$, d.h. $z \in \{i, -9i\}$

c) $z^2 - 2z + 4 - 2i + 2iz = 0$

Lösung: $z^2 - 2z + 4 - 2i + 2iz = z^2 - (2-2i)z + 4 - 2i = (z-1+i)^2 - (-1+i)^2 + 4 - 2i$ verschwindet genau dann, wenn $(z-1+i)^2 = -4 \iff z = 1-i\pm 2i$ ist, d.h. $z \in \{1+i, 1-3i\}$

d) Welche quadratische Gleichung mit führendem Koeffizienten eins hat die beiden Lösungen $z_1 = 1+2i$ und $z_2 = 3-4i$?

Lösung: Das ist die Gleichung $(z-z_1)(z-z_2) = 0$, also $\bigl(z-(1+2i)\bigr)\bigl(z-(3-4i)\bigr) = 0$; ausmultipliziert ist das die Gleichung $z^2 - (4-2i)z + 11 + 2i = 0$. (Der Koeffizient von z ist die negative Summe der Wurzeln, der konstante Koeffizient das Produkt.)

Aufgabe 3: *(12 Punkte)*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen irgendwo holomorph sind, und geben Sie gegebenenfalls das größtmögliche Teilgebiet G von $\mathbb{C}$ an, auf dem dies der Fall ist! Untersuchen Sie auch, ob die jeweilige Funktion in den Punkten, in denen sie nicht holomorph ist, meromorph ist!

a) $f(z) = e^{\tan z}$ *b)* $f(z) = \tan e^z$ *c)* $f(z) = \dfrac{\sin^2 z}{1 + e^{z^2}}$ *d)* $f(z) = \dfrac{z^2 - z}{z^4 - 1}$

Begründen Sie ihre Aussagen!

Lösung:

a) Die Exponentialfunktion ist auf ganz $\mathbb{C}$ hologmorph, der Tangens ist dort meromorph mit Polen an den Stellen $\pi/2 + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Da die Exponentialfunktion an der Stelle ∞ eine wesentliche Singularität hat, ist $f(z)$ an den Polen des Tangens weder holomorph noch meromorph; $G = \mathbb{C} \setminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ist also das größte Teilgebiet von $\mathbb{C}$, in dem f holomorph ist, und nur dort ist die Funktion auch meromorph.

b) Da die Exponentialfunktion auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist, müssen nur die Pole des Tangens beachtet werden. f ist daher holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ mit Ausnahme der Punkte, für die $e^z = \pi/2 + k\pi$ ist für ein $k \in \mathbb{Z}$. Für $k \geq 0$ sind das die Zahlen $\log(\pi/2 + k\pi) + 2\ell\pi$, für $k < 0$ wegen $e^\pi = -1$ die Zahlen $\log(\pi/2 - k\pi) + (2\ell + 1)\pi i$, wobei log jeweils den *reellen* Logarithmus bezeichnet und ℓ eine beliebige ganze Zahl. In diesen Punkten hat f jeweils wie der Tangens einen Pol erster Ordnung; sie ist also meromorph auf ganz $\mathbb{C}$.

c) Sowohl Zähler als auch Nenner sind holomorph auf ganz $\mathbb{C}$; Probleme machen also nur die Nennernullstellen. $1 + e^{z^2}$ verschwindet, wenn $e^{z^2} = -1$ ist, d.h. wenn z^2 ein ungeradzahliges Vielfaches von πi ist. z ist dann von der Form $z = \pm\sqrt{k\pi i} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{k\pi}(1 + i)$, da das Quadrat von $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$ gleich i ist. An diesen Stellen hat f einen Pol erster Ordnung, ist also meromorph.

d) Der Nenner dieser Funktion verschwindet genau bei den Zahlen z mit $z^4 = 1$, also bei $z \in \{1, -1, i, -i\}$; der Zähler hat die Nullstellen 0 und 1. Da alle Nullstellen Ordnung eins haben, hebt sich die Eins in Zähler und Nenner weg; die Funktion ist also holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{-1, i, -i\}$ und meromorph auf ganz $\mathbb{C}$ (und sogar $\widehat{\mathbb{C}}$).

Aufgabe 4: *(8 Punkte)*

Für jede reelle Zahl $a > 0$ sei Q_a das offene Quadrat mit Ecken $\pm a \pm ia$, und ∂Q_a sei sein im Gegenuhrzeigersinn durchlaufener Rand. Für $b > 0$ sei $\widetilde{Q}_b$ das Quadrat mit Ecken $\pm b$ und $\pm ib$, und auch hier sei $\partial\widetilde{Q}_b$ der im Gegenuhrzeigersinn durchlaufene Rand.

a) Zeigen Sie, daß die Funktion $\dfrac{1}{\sin \frac{1}{3-z}}$ auf Q_3 meromorph ist und dort unendlich viele Pole hat!

Lösung: Für reelle z aus dem Intervall $(-3, 3)$ nimmt $1/(3 - z)$ alle reellen Werte größer $1/6$ an, also insbesondere alle Werte $2k\pi$ mit $k \in \mathbb{N}$, und dort hat der Sinus einfache Nullstellen. Die angegebene Funktion hat dort somit Pole erster Ordnung; überall sonst auf Q_3 ist sie holomorph, da $1/(3 - z)$ auf Q_3 und der Sinus auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist.

b) $f\colon Q_3 \to \mathbb{C}$ sei eine weitere auf Q_3 meromorphe Funktion, die auf $Q_3 \setminus Q_1$ sogar holomorph sei. Zeigen Sie, daß f höchstens endlich viele Pole in Q_3 hat!

Lösung: Da f auf $Q_3 \setminus Q_1$ holomorph ist, können etwaige Pole nur in Q_1 liegen. Wenn es unendlich viele sind, haben sie einen Häufungspunkt auf der kompakten Menge $\overline{Q_1} \subset Q_3$, und das ist nach Definition einer auf Q_3 meromorphen Funktion ausgeschlossen. Somit gibt es höchstens endlich viele Pole.

c) Zeigen Sie, daß die Ecken von Q_a auf den Kanten von $\widetilde{Q}_{2a}$ liegen.

Lösung: Für jede der vier Vorzeichenkombinationen ist $\pm a \pm ia = \frac{1}{2} \pm 2a + \frac{1}{2}(\pm ia)$ der Mittelpunkt der Strecke von $\pm a$ nach $\pm ia$.

d) Folgern Sie, daß für jede Funktion f wie in *b)* gilt: $\displaystyle\int_{\partial Q_1} f(z)\,dz = \int_{\partial \widetilde{Q}_2} f(z)\,dz$.
Hinweis: Machen Sie eine Skizze!

Lösung: Jede Ecke P von $\widetilde{Q}_2$ bildet zusammen mit den beiden Ecken von Q_1, die auf den von P ausgehenden Kanten liegen, ein Dreieck. Eine seiner Kanten ist gleichzeitig Kante von Q_1, und da f in Q_1 höchstens endlich viele Pole hat, gibt es eine reelle Zahl $d > 0$, so daß jeder Pol mindestens Abstand d von dieser Kante hat. ℓ sei die zu dieser Kante parallele Gerade im Abstand d, die durch das Innere von Q_1 geht. Dann ist f holomorph in allen Punkten von Q_3, die auf der gleichen Seite von ℓ wie das Dreieck liegen, und diese Punkte bilden ein konvexes Gebiet. Daher verschwindet das Intgegral über das Dreieck nach dem CAUCHYschen Integralsatz.
Da die Differenz der beiden Integrale über $\widetilde{Q}_2$ und Q_1 die Summe der Integrale über die vier Dreiecke ist, folgt die Behauptung.

Aufgabe 5: (*15 Punkte*)
D sei die Kreisscheibe mit Radius eins um den Nullpunkt und $\triangle$ sei das Dreieck mit Ecken 0, 1 und i. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{dz}{\cos z}$ *b)* $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{dz}{\pi z - 1}$ *c)* $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{(z+1)(z+3)(z+5)}{z(z+2)(z+4)}\,dz$ *d)* $\displaystyle\int_{\partial\triangle} \frac{3\,dz}{z^2 - 2i}$ *e)* $\displaystyle\int_{\partial\triangle} \Im m\, z\,dz$

Lösung:

a) $1/\cos z$ ist überall dort holomorph, wo der Kosinus nicht verschwindet. Dessen Nullstellen sind die Zahlen $\frac{\pi}{2} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$, also ist der Integrand insbesondere holomorph in der offenen Kreisscheibe mit Radius $\pi/2$ um Null. Dies ist ein konvexes Gebiet, das den Integrationsweg enthält; somit verschwindet das Integral nach dem CAUCHYschen Integralsatz.

b) Der Integrand hat in $\mathbb{C}$ genau eine Polstelle, nämlich bei $z = 1/\pi i$, und diese liegt im Innern der Kreisscheibe D. Somit ist

$$\int_{\partial D} \frac{dz}{\pi z - 1} = \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \frac{dz}{z - 1/\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot 2\pi i = 2i\,.$$

c) Der Nenner hat Nullstellen bei $z = 0, z = -2$ und $z = -4$; davon liegt nur die Null im Innern der Kreisscheibe. Nach dem Residuensatz ist das Integral daher gleich $2\pi i$ man dem Residuum bei $z = 0$. Wegen der Einfachheit des dortigen Pols ist

$$\operatorname{Res}_0 \frac{(z+1)(z+3)(z+5)}{z(z+2)(z+4)} = \lim_{z\to 0} z \cdot \frac{(z+1)(z+3)(z+5)}{z(z+2)(z+4)} = \lim_{z\to 0} \frac{(z+1)(z+3)(z+5)}{(z+2)(z+4)} = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4} = \frac{15}{8}\,,$$

und das Integral ist gleich $15\pi i/4$.

d) Die beiden z-Werte mit $z^2 = 2i$ sind $1 + i$ und $-1 - i$; beide liegen außerhalb des Dreiecks. Der Kreis um Null mit Radius 5/4 ist ein konvexes Gebiet, in dem der Integrand holomorph ist und das den Integrationsweg enthält; somit verschwindet das Integral nach dem CAUCHYschen Integralsatz.

e) Auf dem Weg von 0 nach 1 verschwindet der Imaginärteil von z und damit auch das entsprechende Integral. Den Weg von 1 nach i können wir auf [0, 1] parametrisieren durch $\gamma_2(t) = 1 - t + it$; somit ist $\displaystyle\int_{\gamma_2} \Im m\, z\,dz = \int_0^1 t(i-1)\,dt = \frac{i-1}{2}\,.$

Für den Weg von i nach 0 betrachten wir $\gamma_3(t) = (1-t)i$ und erhalten

$$\int_{\gamma_3} \Im m\, z\, dz = \int_0^1 (1-t)\cdot(-i)\, dt = t - \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 \cdot (-i) = -\frac{i}{2}\,.$$

Das Integral über den gesamten Dreiecksrand ist somit $\dfrac{i-1}{2} - \dfrac{i}{2} = -\dfrac{1}{2}\,.$

Aufgabe 6: *(7 Punkte)*
Welche der folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren, und welchen Wert haben diese?

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)(x+4)}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+2)(x^2+4)}{(x^2+1)(x^2+9)}\, dx, \quad I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\, dx}{(x^2+4)(x^2+81)}$$

Lösung: Bei I_1 ist der Zähler des Integranden vom Grad zwei und der Nenner hat Grad vier; außerdem gibt es keine reellen Polstellen. Somit existiert das Integral und kann über die Residuen in der oberen Halbebene berechnet werden. Die Pole dort sind bei i und $2i$ und beide einfach; also ist

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_i \frac{(z+1)(z+4)}{(z^2+1)(z^2+4)} &= \lim_{z\to i}(z-i)\frac{(z+1)(z+4)}{(z^2+1)(z^2+4)} = \lim_{z\to i}\frac{(z+1)(z+4)}{(z+i)(z^2+4)}\\ &= \frac{(i+1)(i+4)}{2i\cdot 3} = \frac{3+5i}{6i}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{2i} \frac{(z+1)(z+4)}{(z^2+1)(z^2+4)} &= \lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{(z+1)(z+4)}{(z^2+1)(z^2+4)} = \lim_{z\to 2i}\frac{(z+1)(z+4)}{(z^2+1)(z+2i)}\\ &= \frac{(2i+1)(2i+4)}{(-3)\cdot 4i} = \frac{10i}{-12i} = -\frac{5i}{6i}\,.\end{aligned}$$

Die Summe der beiden Residuen ist somit

$$\frac{3+5i}{6i} - \frac{5i}{6i} = \frac{3}{6i} = \frac{1}{2i} \quad \text{und} \quad I_1 = 2\pi i\cdot\frac{1}{2i} = \pi\,.$$

Beim Integranden von I_2 ist der Zähler für alle x größer als der Nenner, also ist der Integrand stets größer als eins, so daß das Integral divergieren muß.
In I_3 hat der Zähler um drei kleineren Grad als der Nenner, und dieser hat keine reellen Nullstellen. Somit ist die Methode über den Residuensatz anwendbar, und das Integral existiert; sein Wert ist $2\pi i$ mal der Summe der Residuen in den Punkten $2i$ und $9i$. Diese müssen wir nicht ausrechnen, denn da der Integrand ungerade ist und das Integral konvergiert, ist klar, daß es verschwindet.