Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

16. April 2019

Modulklausur Elemente der Funktionentheorie

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •
• • • **Die Aufgaben müssen *nicht* in der angegebenen Reihenfolge** • • •
• • • **bearbeitet werden; konzentrieren sie sich zunächst** • • •
• • • **auf das, womit sie schnell Punkte holen können!** • • •

Aufgabe 1: (*10 Punkte*)
Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + iy$:

a) $(1+3i)(2i-1)$ *b)* $\dfrac{2+3i}{2i+3}$ *c)* $\left(1+\sqrt{-3}\right)^3$ *d)* $\dfrac{(1+\sqrt{-3})^{99}}{2^{99}}$ *e)* $e^{\pi i/4}$

Aufgabe 2: (*8 Punkte*)
Bestimmen Sie jeweils alle $z \in \mathbb{C}$, die den folgenden Gleichungen genügen:

a) $z^2 - 8z + 25 = 0$
b) $z^2 + 8iz + 9 = 0$
c) $z^2 - 2z + 4 - 2i + 2iz = 0$
d) Welche quadratische Gleichung mit führendem Koeffizienten eins hat die beiden Lösungen $z_1 = 1 + 2i$ und $z_2 = 3 - 4i$?

Aufgabe 3: (*12 Punkte*)
Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen irgendwo holomorph sind, und geben Sie gegebenenfalls das größtmögliche Teilgebiet G von $\mathbb{C}$ an, auf dem dies der Fall ist! Untersuchen Sie auch, ob die jeweilige Funktion in den Punkten, in denen sie nicht holomorph ist, meromorph ist!

a) $f(z) = e^{\tan z}$ *b)* $f(z) = \tan e^z$ *c)* $f(z) = \dfrac{\sin^2 z}{1+e^{z^2}}$ *d)* $f(z) = \dfrac{z^2 - z}{z^4 - 1}$

Begründen Sie ihre Aussagen!

Aufgabe 4: (*8 Punkte*)
Für jede reelle Zahl $a > 0$ sei Q_a das offene Quadrat mit Ecken $\pm a \pm ia$, und ∂Q_a sei sein im Gegenuhrzeigersinn durchlaufener Rand. Für $b > 0$ sei $\widetilde{Q}_b$ das Quadrat mit Ecken $\pm b$ und $\pm ib$, und auch hier sei $\partial\widetilde{Q}_b$ der im Gegenuhrzeigersinn durchlaufene Rand.

a) Zeigen Sie, daß die Funktion $\dfrac{1}{\sin\frac{1}{3-z}}$ auf Q_3 meromorph ist und dort unendlich viele Pole hat!
b) $f\colon Q_3 \to \mathbb{C}$ sei eine weitere auf Q_3 meromorphe Funktion, die auf $Q_3 \setminus Q_1$ sogar holomorph sei. Zeigen Sie, daß f höchstens endlich viele Pole in Q_3 hat!
c) Zeigen Sie, daß die Ecken von Q_a auf den Kanten von $\widetilde{Q}_{2a}$ liegen.
d) Folgern Sie, daß für jede Funktion f wie in *b)* gilt: $\displaystyle\int_{\partial Q_1} f(z)\,dz = \int_{\partial\widetilde{Q}_2} f(z)\,dz\,.$
Hinweis: Machen Sie eine Skizze!

Aufgabe 5: *(15 Punkte)*

D sei die Kreisscheibe mit Radius eins um den Nullpunkt und $\triangle$ sei das Dreieck mit Ecken $0, 1$ und i. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{dz}{\cos z}$ *b)* $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{dz}{\pi z - 1}$ *c)* $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{(z+1)(z+3)(z+5)}{z(z+2)(z+4)}\, dz$ *d)* $\displaystyle\int_{\partial \triangle} \frac{3\, dz}{z^2 - 2i}$ *e)* $\displaystyle\int_{\partial \triangle} \mathfrak{Im}\, z\, dz$

Aufgabe 6: *(7 Punkte)*

Welche der folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren, und welchen Wert haben diese?

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)(x+4)}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+2)(x^2+4)}{(x^2+1)(x^2+9)}\, dx, \quad I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\, dx}{(x^2+4)(x^2+81)}$$