Wolfgang K. Seiler A5, C201
Tel. 2515

31. August 2017

Modulklausur Elemente der Funktionentheorie

Aufgabe 1: *(10 Punkte)*
Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen:

a) $(2+i)(i-3)$ *b)* $\dfrac{1+5i}{i-1}$ *c)* $(i+1)^2$ *d)* $\dfrac{(i+1)^{10}}{16}$ *e)* $e^{\pi i/6}$ in der Form $x+iy$

Lösung:

a) $(2+i)(i-3) = 2i + i^2 - 2\cdot 3 - i\cdot 3 = -7 - i$

b) $\dfrac{1+5i}{i-1} = \dfrac{(1+5i)(-i-1)}{1^2+1^2} = \dfrac{-i+5-1-5i}{2} = 2-3i$

c) $(1+i)^2 = 1^2 + 2i + i^2 = 2i$

d) $\dfrac{(i+1)^{10}}{16} = \dfrac{(2i)^5}{16} = \dfrac{32i^5}{16} = 2i$

e) $e^{\pi i/6} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*
Bestimmen Sie jeweils alle $z \in \mathbb{C}$, die den folgenden Gleichungen genügen:

a) $z^2 - 4z + 5 = 0$

Lösung: $z^2 - 4z + 5 = (z-2)^2 + 1 = 0 \iff (z-2)^2 = -1 \iff z = 2 \pm i$

b) $z^2 - 2iz - 5 = 0$

Lösung: $z^2 - 2iz - 5 = 0 \iff (z-i)^2 = 4 \iff z = \pm 2 + i$

c) $z^2 - 2z + 1 - iz + i = 0$

Lösung: $z^2 - (2-i)z + (1+i) = 0 \iff \left(z - 1 - \frac{1}{2}i\right)^2 - \left(1 + \frac{1}{2}i\right)^2 + (1+i) = 0$
$\iff \left(z-1-\frac{1}{2}i\right)^2 - \left(1+i-\frac{1}{4}\right) + (1+i) = 0 \iff \left(z-1-\frac{1}{2}i\right)^2 = -\frac{1}{4} \iff z = 1 + \frac{1}{2}i \pm \frac{1}{2}i.$
Die Lösungen sind also $z_1 = 1$ und $z_2 = 1+i$.

d) $z^2 = 3 + 4i$

Lösung: Sei $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann ist $(x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$; falls das gleich $3+4i$ sein soll, muß $x^2 - y^2 = 3$ und $2xy = 4$ sein. Also ist $y = 2/x$ und $x^2 - y^2 = x^2 - \frac{4}{x^2} = 3 \iff x^4 - 4 = 3x^2$.
x^2 erfüllt somit die quadratische Gleichung $x^4 - 3x^2 = 4$, d.h. $(x^2 - \frac{3}{2})^2 = \frac{25}{4}$. Somit muß $x^2 = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4$ oder $x^2 = \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -1$ sein. Da x^2 das Quadrat der reellen Zahl x ist, kommt die zweite Lösung nicht in Frage; daher ist $x = \pm 2$ und $y = 2/x$, d.h. wir haben die beiden Lösungen $\pm(2+i)$.

Aufgabe 3: *(12 Punkte)*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen irgendwo holomorph sind, und geben Sie gegebenenfalls das größtmögliche Teilgebiet G von $\mathbb{C}$ an, auf dem dies der Fall ist! Untersuchen Sie auch, ob die jeweilige Funktion in den Punkten, in denen sie nicht holomorph ist, meromorph ist!

a) $f(z) = \left|e^{i\sin(\mathfrak{Im}\, z)}\right|$ *b)* $f(z) = \cos(e^{\sin z})$ *c)* $f(z) = \sin z + \overline{\cos z}$ *d)* $f(z) = \dfrac{z-5}{z^4-16}$

Begründen Sie ihre Aussagen!

Lösung:

a) Da $\sin(\mathfrak{Im}\, z)$ eine reelle Zahl ist, ist der Exponent rein imaginär; somit ist $\left|e^{i\sin(\mathfrak{Im}\, z)}\right| = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Als konstante Funktion ist f natürlich auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph.

b) Kosinus, Sinus und Exponentialfunktion sind auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph, also auch die Hintereinanderausführung $f(z) = \cos(e^{\sin z})$.

c) Die Funktion $g(z) = \cos z - \sin z$ ist auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Ist f auf einem Gebiet G holomorph, ist dort daher auch die Summe $f+g$, d.h. die Funktion $\cos z + \overline{\cos z} = 2\,\mathfrak{Re}(\cos z)$ holomorph. Da diese Funktion nur reelle Werte annimmt, muß sie konstant sein, und das ist der Realteil des Kosinus auf keinem Gebiet. Also ist f nirgends holomorph und damit auch nirgends meromorph.

d) Der Nenner dieser Funktion verschwindet genau bei den Zahlen z mit $z^4 = 16$, also bei $z \in \{2, -2, 2i, -2i\}$. Somit ist die Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \{2, -2, 2i, -2i\}$ holomorph. In den vier Nennernullstellen hat sie Pole erster Ordnung, da der Zähler dort nicht verschwindet. Somit ist sie dort nicht holomorph und kann auch nicht holomorph fortgesetzt werden; sie ist aber auf ganz $\mathbb{C}$ (und sogar $\widehat{\mathbb{C}}$) meromorph.

Aufgabe 4: *(8 Punkte)*

D sei die Kreisscheibe mit Radius eins um den Nullpunkt, und Q sei das Quadrat mit den Ecken $\pm 1 \pm i$. Weiter sei f eine im Gebiet $G = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{2} < |z| < 3\}$ holomorphe Funktion. Dann gilt

$$\int_{\partial D} f(z)\, dz = \int_{\partial Q} f(z)\, dz\,.$$

(*Hinweis:* Zerlegen Sie die Integrationswege jeweils in eine obere und eine untere Hälfte.)

Lösung: D ist der Inkreis des Quadrates Q, und $Q \setminus D$ liegt ganz im Gebiet G. Wir betrachten folgende Integrationswege:

γ_1 und γ_2 beginnen im Punkt 1 und führen im Gegenuhrzeigersinn auf ∂D *bzw.* ∂Q zum Punkt -1.

γ_3 und γ_4 beginnen im Punkt -1 und führen im Gegenuhrzeigersinn auf ∂D *bzw.* ∂Q zum Punkt 1.

Offensichtlich ist das Integral über ∂D die Summe der Integrale über γ_1 und über γ_3, das über ∂Q entsprechend die über γ_2 und γ_4.

Bezeichnen wir mit δ_1 den Integrationsweg, der mit γ_1 beginn und dann mit $-\gamma_3$ zurück zur Eins geht und mit δ_2 den, der mit γ_2 beginnt und mit γ_4 zurückgeht, so ist die Differenz der Integrale über ∂D und über ∂Q gleich der Summe der Integrale über δ_1 und δ_2. Beides sind geschlossene Integrationswege, die jeweils ein mondförmiges Gebiet beranden, das genau wie sie selbst ganz im Holomorphiegebiet G liegt. Daher verschwinden die Integrale über δ_1 und δ_2 nach dem CAUCHYschen Integralsatz, und damit sind auch die Integrale über ∂D und ∂Q gleich.

Aufgabe 5: *(15 Punkte)*

D sei die Kreisscheibe mit Radius eins um den Nullpunkt und $\triangle$ sei das Dreieck mit Ecken $0, 1$ und i. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_{\partial D} \tan z\,dz$ *b)* $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{dz}{2z-1}$ *c)* $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{2\,dz}{z^2-2z}$ *d)* $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{3\,dz}{z-2}$ *e)* $\displaystyle\int_{\partial\triangle} \Re z\,dz$

Lösung:

a) $\tan z = \sin z/\cos z$ ist überall dort holomorph, wo der Kosinus nicht verschwindet. Dessen Nullstellen sind die Zahlen $\frac{\pi}{2} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$, und von denen liegt keine im Innern oder auf dem Rand von D. Daher ist der Tangens holomorph in einer Umgebung von $\overline{D}$, so daß das Integral nach dem CAUCHYschen Integralsatz verschwindet.

b) Der Integrand hat in D genau eine Polstelle, nämlich bei $z = \frac{1}{2}$. Das Residuum dort ist gleich $\frac{1}{2}$, denn die LAURENT-Reihe um $\frac{1}{2}$ ist $f(z) = \frac{1}{2}(z - \frac{1}{2})^{-1}$. Somit hat das Integral nach dem Residuensatz den Wert πi.

Alternativ: Wende die CAUCHYsche Integralformel $2\pi i f(\frac{1}{2}) = \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-\frac{1}{2}}\,dz$ an auf $f(z) = \frac{1}{2}$.

c) $z^2 - 2z = z(z-2)$ verschwindet für $z = 0$ und für $z = 2$. Da

$$\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z} = \frac{2}{z(z-2} \quad \text{ist} \quad \int_{\partial D} \frac{2\,dz}{z^2-2z} = \int_{\partial D} \frac{dz}{z-2} - \int_{\partial D} \frac{dz}{z} = 0 - 2\pi i = -2\pi i\,.$$

d) Da $3/(z-2)$ in einer Umgebung von $\overline{D}$ holomorph ist, verschwindet dieses Integral nach dem CAUCHYschen Integralsatz.

e) Wir teilen den Integrationsweg auf in drei Integrationswege $\gamma_i\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma_1(t) = t$ für den Weg von 0 nach 1, $\gamma_2(t) = (1-t) + it$ für den Weg von 1 nach i, und mit $\gamma_3(t) = (1-t)i$ geht es zurück zur Null. Somit ist

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\triangle} \Re z\,dz &= \int_{\gamma_1} \Re z\,dz + \int_{\gamma_2} \Re z\,dz + \int_{\gamma_1} \Re z\,dz \\
&= \int_0^1 \Re t\,dt + \int_0^1 \Re\big((1-t) + it\big)(-1+i)\,dt + \int_0^1 \Re\big((1-t)i\big)(-i)\,dt \\
&= \int_0^1 t\,dt + (i-1)\int_0^1 (1-t)\,dt - i\int_0^1 0\,dt \\
&= \frac{1}{2} + (i-1)\left(1 - \frac{1}{2}\right) + 0 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} - \frac{1}{2} = \frac{i}{2}\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6: *(7 Punkte)*

a) Für welche(s) der folgenden Integrale läßt sich der aus der Vorlesung bekannte Ansatz über den Residuensatz anwenden?

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+8}, \qquad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{x^2+9}, \qquad I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^4+81}, \qquad I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4-81}$$

Lösung: Für I_1 und I_3 ist diese Methode anwendbar, denn der Grad des Zählers ist um mindestens eins kleiner als der des Nenners und keine Nullstelle des Nenners liegt auf der reellen Achse. Bei I_2 ist der Nennergrad nur um eins größer als der Zählergrad; hier läßt sich der Ansatz über denResiduensatz nicht anwenden, da das Integral über den Halbkreis nicht verschwindet. Bei I_4 läßt er sich nicht anwenden, da der Integrand reelle Nullstellen hat, nämlich ± 3.

b) Zeigen Sie, daß eines der vier Integrale aus offensichtlichen Gründen verschwinden muß!

Lösung: Der Integrand von I_3 ist ungerade; da das Integral wegen *a)* existiert, muß es also verschwinden.

c) Berechnen Sie (irgendwie) den Wert von I_1 !

Lösung: Das Integral könnte über Partialbruchzerlegung berechnet werden; einfacher geht es aber wohl mit dem Residuensatz. Der Nenner des Integranden ist

$$x^2 + 4x + 8 = (x+2)^2 + 4\,,$$

hat also die Nullstellen $-2 \pm 2i$. Nach dem Residuensatz, so wie wir ihn in der Vorlesung angewendet haben, ist somit

$$I_1 = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-2+2i} \frac{1}{z^2+4z+8}\,.$$

Da die beiden Nennernullstellen einfach sind, ist

$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_{z=-2+2+} \frac{1}{z^2+4z+8} &= \lim_{z\to-2+2i} \frac{z-(-2+2i)}{z^2+4z+8} = \lim_{z\to-2+2i} \frac{1}{z-(-2-2i)} \\ &= \frac{1}{-2+2i+2+2i} = \frac{1}{4i}\,. \end{aligned}$$

Somit ist $I_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+8} = 2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}\,.$