WOLFGANG K. SEILER A5, C201
Tel. 2515

31. August 2017

Modulklausur Elemente der Funktionentheorie

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •
• • • **Die Aufgaben müssen *nicht* in der angegebenen Reihenfolge** • • •
• • • **bearbeitet werden; konzentrieren sie sich zunächst** • • •
• • • **auf das, womit sie schnell Punkte holen können!** • • •

Aufgabe 1: (*10 Punkte)*
Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen:

a) $(2+i)(i-3)$ *b)* $\dfrac{1+5i}{i-1}$ *c)* $(i+1)^2$ *d)* $\dfrac{(i+1)^{10}}{16}$ *e)* $e^{\pi i/6}$ in der Form $x+iy$

Aufgabe 2: (*8 Punkte)*
Bestimmen Sie jeweils alle $z \in \mathbb{C}$, die den folgenden Gleichungen genügen:

a) $z^2 - 4z + 5 = 0$
b) $z^2 - 2iz - 5 = 0$
c) $z^2 - 2z + 1 - iz + i = 0$
d) $z^2 = 3 + 4i$

Aufgabe 3: (*12 Punkte)*
Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen irgendwo holomorph sind, und geben Sie gegebenenfalls das größtmögliche Teilgebiet G von $\mathbb{C}$ an, auf dem dies der Fall ist! Untersuchen Sie auch, ob die jeweilige Funktion in den Punkten, in denen sie nicht holomorph ist, meromorph ist!

a) $f(z) = \left|e^{i\sin(\mathfrak{Im}\, z)}\right|$ *b)* $f(z) = \cos(e^{\sin z})$ *c)* $f(z) = \sin z + \overline{\cos z}$ *d)* $f(z) = \dfrac{z-5}{z^4-16}$

Begründen Sie ihre Aussagen!

Aufgabe 4: (*8 Punkte)*
D sei die Kreisscheibe mit Radius eins um den Nullpunkt, und Q sei das Quadrat mit den Ecken $\pm 1 \pm i$. Weiter sei f eine im Gebiet $G = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{2} < |z| < 3\}$ holomorphe Funktion. Dann gilt

$$\int_{\partial D} f(z)\, dz = \int_{\partial Q} f(z)\, dz\,.$$

(*Hinweis:* Zerlegen Sie die Integrationswege jeweils in eine obere und eine untere Hälfte.)

• • • **Bitte wenden!** • • •

Aufgabe 5: *(15 Punkte)*

D sei die Kreisscheibe mit Radius eins um den Nullpunkt und $\triangle$ sei das Dreieck mit Ecken $0, 1$ und i. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_{\partial D} \tan z \, dz$ *b)* $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{dz}{2z-1}$ *c)* $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{2\,dz}{z^2-2z}$ *d)* $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{3\,dz}{z-2}$ *e)* $\displaystyle\int_{\partial \triangle} \mathfrak{Re}\, z \, dz$

Aufgabe 6: *(7 Punkte)*

a) Für welche(s) der folgenden Integrale läßt sich der aus der Vorlesung bekannte Ansatz über den Residuensatz anwenden?

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+8}, \qquad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{x^2+9}, \qquad I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^4+81}, \qquad I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4-81}$$

b) Zeigen Sie, daß eines der vier Integrale aus offensichtlichen Gründen verschwinden muß!

c) Berechnen Sie (irgendwie) den Wert von I_1 !