

21. April 2017

## Modulklausur Elemente der Funktionentheorie

- Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen! •••  
••• Die Aufgaben müssen *nicht* in der angegebenen Reihenfolge •••  
••• bearbeitet werden; konzentrieren sie sich zunächst •••  
••• auf das, womit sie schnell Punkte holen können! •••

### Aufgabe 1: (10 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen:

a)  $(i+3)(i-3)$     b)  $\frac{3+4i}{1-2i}$     c)  $(i-1)^2$     d)  $\frac{(i-1)^{100}}{2^{50}}$     e)  $\sqrt{i}$

### Aufgabe 2: (8 Punkte)

- a) Zeigen Sie: Jede komplexe Zahl  $z$  vom Betrag eins läßt sich darstellen in der Form  $z = w/\bar{w}$  mit  $w \in \mathbb{C}$ .  
b) Wie viele mögliche Zahlen  $w$  gibt es, wenn noch zusätzlich verlangt wird, daß auch  $w$  den Betrag eins haben soll?  
c) Zeigen Sie, daß dann  $w/\bar{w} = w^2$  ist!

### Aufgabe 3: (12 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen irgendwo holomorph sind, und geben Sie gegebenenfalls das größtmögliche Teilgebiet  $G$  von  $\mathbb{C}$  an, auf dem dies der Fall ist! Untersuchen Sie auch, ob die jeweilige Funktion in den Punkten, in denen sie nicht holomorph ist, meromorph ist!

a)  $f(z) = e^{\sin(e^z+z^2)}$     b)  $f(z) = |z|^2 - 2(\Im z)^2 + 2i(\Re z)(\Im z)$     c)  $f(z) = z^2 + (\bar{z})^2$

d)  $f(z) = \frac{21z}{(z^2+4)(z^2+2017)}$

Begründen Sie ihre Aussagen!

### Aufgabe 4: (8 Punkte)

$D$  sei die Kreisscheibe mit Radius eins um den Nullpunkt, und  $\Delta$  sei das Dreieck mit den dritten Einheitswurzeln  $1$ ,  $\zeta_3 = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$  und  $\bar{\zeta}_3 = \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$  als Ecken. Weiter sei  $f$  eine im Gebiet  $G = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{4} < |z| < 5\}$  holomorphe Funktion. Dann gilt

$$\int_{\partial D} f(z) dz = \int_{\partial \Delta} f(z) dz.$$

(Hinweis: Betrachten Sie die drei Dreiecksseiten jeweils einzeln, zusammen mit den darüberliegenden Drittelkreisen.)

**Aufgabe 5:** (15 Punkte)

D sei die Kreisscheibe mit Radius zwei um den Nullpunkt. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$a) \int_{\partial D} |z|^2 dz \quad b) \int_{\partial D} \frac{dz}{z-1} \quad c) \int_{\partial D} \frac{5z}{z-3} dz \quad d) \int_{\partial D} \frac{2z}{z^2 - 2z + 2} dz \quad e) \int_{\partial D} \frac{\cos z}{z^3} dz$$

**Aufgabe 6:** (7 Punkte)

Berechnen Sie  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{20x}{(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 5)} dx$ !