WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

B6, B4.18

10. Mai 2019

10. Übungsblatt Funktionentheorie I

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

a) Das Gebiet G sei einfach zusammenhängend, f sei eine in G holomorphe Funktion und z_1, z_2 seien zwei Punkte aus G. Zeigen Sie, daß das Integral $\int_\gamma f(z)\,dz$ für alle Integrationswege $\gamma\colon [a,b] \to G$ mit $\gamma(a) = z_1$ und $\gamma(b) = z_2$ denselben Wert hat!

b) Zeigen Sie, daß jede in G holomorphe Funktion dort eine Stammfunktion hat!

c) Zeigen Sie, daß es auf jedem einfach zusammenhängenden Gebiet G einen Zweig des Logarithmus gibt!

d) Finden Sie ein möglichst großes einfach zusammenhängendes Gebiet G, in dem die Funktion $z \mapsto 1/z$ holomorph ist, und geben Sie eine Stammfunktion an!

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

a) Für jeden Zweig $L\colon G \to \mathbb{C}$ des Logarithmus gibt es zu je zwei Punkten $w, z \in G$ ganze Zahlen $k, \ell \in \mathbb{Z}$, so daß $L(wz) = L(w) + L(z) + 2k\pi i$ und $L(w/z) = L(w) - L(z) + 2\ell\pi i$.

b) Finden Sie für den Hauptwert des Logarithmus zwei komplexe Zahlen $w, z \in \mathbb{C}$, für die $\operatorname{Log}(wz) \neq \operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w$.

c) Definieren Sie analog zum Fall der Funktion $z \mapsto a^z$ für beliebiges $a \in \mathbb{C}$ Zweige einer Funktion $z \mapsto z^a$!

d) Auf welcher Art von Gebieten kann $z \mapsto z^a$ so als holomorphe Funktion definiert werden?

e) Geben Sie für jede natürliche Zahl n ein a an, so daß diese Funktion n Zweige hat. Für welche $a \in \mathbb{C}$ gibt es unendlich viele Zweige?

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Die komplexe Zahl $z = re^{i\varphi}$ sei in Polarkoordinatendarstellung gegeben mit $\varphi \in (-\pi, \pi]$. Was ist der Hauptwert ihres Logarithmus?

b) Bestimmen Sie den Hauptwert des Logarithmus von $1 + i$!

c) Zerlegen Sie die TAYLOR-Reihe von $\operatorname{Log}(1 + x)$ an der Stelle $x = i$ in ihren Real- und Imaginärteil, und geben Sie so Reihen an, die gegen Real- und Imaginärteil von $\operatorname{Log}(1 + i)$ konvergieren!

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Die Funktion $f\colon \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \dfrac{\sin iz}{e^{2z} - 1} \end{cases}$ ist holomorph auf $\mathbb{C}$ und hat keine Nullstellen.

b) Finden Sie eine holomorphe Funktion $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, so daß $f(z) = e^{g(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$!

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 15. Mai 2019, um 11.59 Uhr