Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

B6, B4.18

3. April 2019

8. Übungsblatt Funktionentheorie I

Aufgabe 1: *(8 Punkte)*

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\colon [0, 1] \to \mathbb{C}$ seien die Integrationswege mit

$$\gamma_1(t) = 1+t(i-1), \quad \gamma_2(t) = -1+t(i+1), \quad \gamma_3(t) = 1-t(i+1) \quad \text{und} \quad \gamma_4(t) = -1-t(i-1)\,.$$

a) Zeigen Sie, daß $\Gamma = \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4$ ein Zyklus ist!

b) Berechnen Sie die Windungszahl dieses Zyklus um den Nullpunkt!

c) Ist Γ nullhomolog auf $\mathbb{C}$?

d) Ist Γ nullhomolog auf $\left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \frac{1}{2}\right\}$?

e) Was ist $\displaystyle\int_\Gamma \frac{dz}{z}$?

Aufgabe 2: *(12 Punkte)*

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\colon [0, 1] \to \mathbb{C}$ seien die Integrationswege mit

$$\gamma_1(t) = t, \quad \gamma_2(t) = -t, \quad \gamma_3(t) = e^{\pi i t} \quad \text{und} \quad \gamma_4(t) = e^{-\pi i t}\,.$$

a) Welche Bedingungen müssen die ganzen Zahlen n_1, n_2, n_3 und n_4 erfüllen, damit die Kette $\Gamma = n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2 + n_3\gamma_3 + n_4\gamma_4$ ein Zyklus ist?

b) Bestimmen Sie alle Zykel dieser Form, bei denen $|n_i| \le 1$ für alle i gilt!

c) Geben Sie für jeden dieser Zykeln Γ einen Integrationsweg γ an derart, daß

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz$$

für alle meromorphen Funktionen, die keinen Pol auf $|\Gamma|$ haben! Bei zwei Zykeln Γ und $-\Gamma$, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, genügt es, γ für einen der beiden anzugeben.

d) Welche dieser Zykeln sind nullhomolog auf $\mathbb{C}$?

e) Welche dieser Zykeln sind nullhomolog auf $\mathbb{C} \setminus \left\{\frac{1}{2}i\right\}$?

f) Zeigen Sie, daß keine zwei dieser Zykeln homolog sind auf $\mathbb{C} \setminus \left\{\frac{1}{2}i, -\frac{1}{2}i\right\}$!

g) Berechnen Sie die Windungszahlen dieser Zykeln um den Punkt $\frac{1}{2}i$!

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 10. April 2019, um 11.59 Uhr