WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

B6, B4.18

13. März 2019

5. Übungsblatt Funktionentheorie I

Aufgabe 1: *(3 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß die Abbildung $f\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}};\ z \mapsto 1/\overline{z}$ auf der Riemannschen Zahlenkugel die Spiegelung an der Äquatorialebene ist!

b) Welche komplexe Abbildung $\widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ beschreibt die Spiegelung am Mittelpunkt der Kugel?

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*

Bestimmen Sie die maximalen Teilmengen von $\widehat{\mathbb{C}}$, auf denen die folgenden Funktionen holomorph *bzw.* meromorph sind. (Falls eine Funktion, so wie sie dasteht, in einem Punkt $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ nicht definiert ist, soll mit $f(z_0)$ der Grenzwert $\lim_{z\to z_0} f(z)$ gemeint sein – falls ein solcher Grenzwert existiert.) Berechnen Sie außerdem in allen Punkten, in denen die Funktion meromorph, aber nicht holomorph ist, den Hauptteil und das Residuum!

a) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z^4-1}$

b) $f(z) = e^{-1/z^2}$

c) $f(z) = \sin(z)$

d) $f(z) = \dfrac{\cos(z)-1}{z}$

Aufgabe 3: *(2 Punkte)*

Zeigen Sie, ohne irgendwelche Eigenschaften der Exponentialfunktion zu benutzen, daß eine nicht identisch verschwindende holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die für ein $a \in \mathbb{C}$ der Differentialgleichung $f'(z) = af(z)$ genügt, keine komplexe Nullstelle haben kann!

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*

D sei die Kreisscheibe mit Radius eins um den Punkt 3. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{dz}{z-\pi}$ *b)* $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{dz}{(z-\pi)^2}$ *c)* $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{dz}{z^2-\pi^2}$ *d)* $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{dz}{(z-\pi)^{2019}}$ *e)* $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{dz}{z-\pi^{2019}}$

Aufgabe 5: *(2 Punkte)*

$f\colon G \to \widehat{\mathbb{C}}$ sei eine meromorphe Funktion auf dem beschränkten Gebiet G, und A sei eine abgeschlossene Teilmenge von G. Zeigen Sie: Dann gibt es zwei holomorphe Funktionen g, h, so daß für alle $z \in A$ gilt $f(z) = g(z)/h(z)$.

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 20. März 2019, um 11.59 Uhr