Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

B6, B4.18

7. März 2019

4. Übungsblatt Funktionentheorie I

Aufgabe 1: *(8 Punkte)*

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen richtig ist, und geben Sie dann entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel:

a) Ist $f: G \to H$ eine bjektive holomorphe Abbildung auf dem Gebiet G, so ist die Umkehrfunktion $f^{-1}: H \to G$ stetig.

b) Stimmen zwei holomorphe Funktionen $f, g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auf einer abgeschlossenen Kreisscheibe überein, so ist $f = g$.

c) Stimmen zwei holomorphe Funktionen $f, g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auf dem Intervall $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ überein, so ist $f = g$.

d) Stimmen zwei holomorphe Funktionen $f, g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auf $\mathbb{Q}$ überein, so ist $f = g$.

e) Stimmen zwei holomorphe Funktionen $f, g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auf $\mathbb{Z}$ überein, so ist $f = g$.

Aufgabe 2: *(7 Punkte)*

Zur Funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gebe es zwei komplexe Zahlen $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ derart, daß

$$f(z + \omega_1) = f(z + \omega_2) = f(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$.

a) Zeigen Sie: Falls $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$, gibt es eine kompakte Teilmenge $Z \subset \mathbb{C}$, so daß f durch seine Werte auf Z eindeutig bestimmt ist.

b) Ist f holomorph und $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$, so ist f konstant.

c) Ist f holomorph, $\omega_1 = 1$ und $\omega_2 = \sqrt{2}$, so ist f konstant. *(Hinweis: Zeigen Sie, daß die Potenzen von $\sqrt{2} - 1$ eine Nullfolge bilden, und folgern Sie daraus, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ganze Zahlen a, b gibt mit $0 < \left| a + b\sqrt{2} \right| < \varepsilon$.)*

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) $f: D \to D$ sei eine holomorphe Abbildung der offenen Kreisscheibe D vom Radius r um z_0 auf sich selbst mit $f(z_0) = z_0$. Dann gilt für alle $z \in D$, daß $|f(z) - z_0| \leq |z - z_0|$ ist, und falls für ein $z \neq z_0$ hier ein Gleichheitszeichen auftritt, ist f eine Drehung um z_0, hat also die Form $z \mapsto z_0 + e^{i\varphi}(z - z_0)$. (*Hinweis:* Die Reduktion auf den Fall $z_0 = 0$ ist ziemlich klar; danach können Sie die Abbildung $z \mapsto f(rz)/r$ betrachten und das Schwarzsche Lemma darauf anwenden.)

b) G sei ein Gebiet und $f: G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung, die eine abgeschlossene Kreisscheibe $D \subset G$ surjektiv auf sich selbst abbilde und den Mittelpunkt dieser Kreisscheibe festlasse. Dann ist f auf ganz G eine Drehung.

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 13. März 2019, um 11.59 Uhr