Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

B6, B4.18

21. Februar 2019

2. Übungsblatt Funktionentheorie I

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*
Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen irgendwo komplex differenzierbar sind, und geben Sie gegebenenfalls die größtmögliche Teilmenge von $\mathbb{C}$ an, auf der dies der Fall ist:

a) $f(z) = e^{z^{z^2}}$ *b)* $f(z) = \Im\mathfrak{m}\, z$ *c)* $f(z) = \Im\mathfrak{m}\, z - i\,\Re\mathfrak{e}\, z$

d) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ *e)* $f(z) = \dfrac{z - z_0}{1 - z\overline{z_0}}$ mit einem festen $z_0 \neq 0$

Begründen Sie ihre Aussagen!

Aufgabe 2: *(2 Punkte)*
$G \subset \mathbb{C}$ sei ein Gebiet. Zeigen Sie, daß jede komplex differenzierbare Funktion $f\colon G \to \mathbb{R}$ konstant ist!

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*
Die Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ sei auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ stetig und für jeden geschlossenen Integrationsweg γ mit $|\gamma| \subset G$ sei $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$. Zeigen Sie, daß f dann eine Stammfunktion hat. (*Hinweis:* Zeigen Sie, daß für ein festgehaltenes $z_0 \in G$ und einen in z_0 beginnenden Integrationsweg γ das Integral $\int_\gamma f(z)\,dz$ nur vom Endpunkt z von γ abhängt, und setzen Sie $F(z)$ gleich diesem Wert. Beachten Sie aber, daß G nicht konvex sein muß!)

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*
$\gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{C}$ sei definiert durch $\gamma(t) = 2t + it^2$.
Berechnen Sie die Integrale

a) $\displaystyle\int_\gamma z^2\,dz$ *b)* $\displaystyle\int_\gamma e^{iz}\,dz$ *c)* $\displaystyle\int_\gamma (\Re\mathfrak{e}\, z + i)\,dz$

d) $\displaystyle\int_\gamma \frac{3-2z}{z^5}\,dz$ *e)* $\displaystyle\int_\gamma |z|^2\,dz$

Aufgabe 5: *(4 Punkte)*
D sei die Kreisscheibe mit Radius eins um den Nullpunkt, und $\triangle$ sei das Dreieck mit den dritten Einheitswurzeln 1, $\zeta_3 = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ und $\overline{\zeta_3} = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$ als Ecken. Weiter sei f eine im Gebiet $G = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{5} < |z| < 5\}$ holomorphe Funktion. Dann gilt

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\,.$$

(*Hinweis:* Betrachten Sie die drei Dreieckseiten jeweils einzeln, zusammen mit den darüberliegenden Drittelkreisen.)

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 27. Februar 2019, um 11.59 Uhr