Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

B6, B4.18

14. Februar 2019

1. Übungsblatt Funktionentheorie I

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen:

a) $(3+i)(i+3)$ *b)* $(4+5i)(3-4i)$ *c)* $(1+i)^{20}$ *d)* $(1-i)^{20}$ *e)* $\dfrac{1+i}{1-i}$ *f)* $\dfrac{1+2i}{2+i}$

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist $(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$!

b) Gilt diese Formel auch für $x \in \mathbb{C}$?

c) x sei eine reelle Zahl. Ist dann auch $\cos ix$ reell?

d) Schreiben Sie $\sin 10x$ als Polynom in $\sin x$ und $\cos x$!

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ sind offen, welche abgeschlossen?

a) $\mathbb{C}$ *b)* $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ *c)* $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \le \mathfrak{Im}\, z < 2\pi\}$ *d)* $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}\, z = 0\}$

Aufgabe 4: *(3 Punkte)*

Wie aus der Analysis bekannt, konvergiert die Taylor-Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^n/n$ der Funktion $\log(1+x)$ für alle $x \in (-1, 1]$.

a) Für welche $z \in \mathbb{C}$ können Sie daraus folgern, daß die komplexe Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}z^n/n$ konvergiert?

b) Konvergiert die Reihe für $z = i$ absolut?

c) Ordnen Sie die Reihe für $z = 1$ so um, daß die nicht mehr konvergiert!

Aufgabe 5: *(3 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Für jede komplexe Zahl z ist $|z/\bar{z}| = 1$.

b) Geben Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^8 = 1$ sowohl in kartesischen als auch in Polarkoordinaten an!

Abgabe bis zum Mittwoch, dem 20. Februar 2019, um 11.59 Uhr