Wolfgang K. Seiler

Elemente der Funktionentheorie

Vorlesung an der Universität Mannheim
im Frühjahrssemester 2019

Kapitel 1: Komplexe Zahlen

§1. Der Körper der komplexen Zahlen

Unter den Zahlen, mit denen wird in der Mathematik üblicherweise rechnen, sind die komplexen Zahlen die jüngsten: Seit Lebewesen zählen können, sind sie zumindest mit hinreichend kleinen natürlichen Zahlen vertraut, und schon vor über vier Jahrtausenden hatten die Babylonier ein Zahlensystem, in dem sie auch mit recht großen natürlichen Zahlen umgehen konnten. Da dazu auch das Teilen gehörte, erweiterten sie die natürlichen Zahlen zu den (positiven) Bruchzahlen, wobei ihre Brüche allerdings alle den Zähler eins hatten, d.h. zwei Fünftel wurden beispielsweise geschrieben werden als Summe von einem Viertel, einem Zehntel und einem Zwanzigstel. Sie kannten auch schon die Lösungsmethode für quadratische Gleichungen, wußten aber nicht, daß die Werte vieler Quadratwurzeln nicht in ihrem System darstellbar waren.

Das erkannten erst eineinhalb Jahrtausende später die Pythagoräer; zwei- bis dreihundert Jahre danach entwickelte EUDOXOS in PLATONs Akademie die Theorie der (positiven) reellen Zahlen im wesentlichen so, wie wir sie heute noch kennen.

Negative Zahlen sind deutlich jünger; sie kamen erst auf, als im sechzehnten Jahrhundert Lösungsformeln für kubische und biquadratische Gleichungen gefunden wurden. Wenn man keine negativen Zahlen und keine Null hat, müssen wir schon für das, was wir heute als die quadratische Gleichung $x^2+px+q=0$ bezeichnenen, zwischen den fünf Gleichungen

$$x^2 = px + q, \quad x^2 + px = q, \quad x^2 + q = px, \quad x^2 = q \quad \text{und} \quad x^2 = px$$

unterscheiden. Bei kubischen und biquadratischen Gleichungen gibt es entsprechend mehr Fälle, die damals alle separat behandelt werden mußten. Durch die Einführung negativer Zahlen gelang es CARDANO, die Lösungsansätze für die verschiedenen Typen kubischer Gleichungen in einer einzigen Formel zusammenzufassen.

GIROLAMO CARDANO (1501–1576) war ein italienischer Mathematiker, Arzt und Naturforscher. Sein Vater war Rechtsanwalt, war aber sehr an Mathematik interessiert. Er diskutierte mit LEONARDO DA VINCI über Geometrie und brachte auch seinem Sohn Mathematik bei. Dieser arbeitete zunächst als Assistent seines Vaters, begann dann aber an der Universität Pavia und später Padua ein Medizinstudium. Nach dem Tod seines Vaters hatte er dessen Vermögen schnell durchgebracht und hielt sich mit Glücksspiel über Wasser, wobei ihm seine guten Kenntnisse der Wahrscheinlichkeitstheorie halfen. 1525 promovierte er in Medizin und eröffnete eine nicht sonderlich erfolgreiche Praxis in einem kleinen Dorf nahe Padua. 1532 zog er nach Mailand, wo er bei der Piatti Stiftung eine Stelle als Mathematiklehrer bekam. Mehrere seiner Schüler und Kollegen waren auch seine Patienten, und es gelang ihm relativ schnell einen ausgezeichneten Ruf als Arzt aufzubauen. Mathematisch beschäftigte er sich vor allem mit der Lösung von Gleichungen dritten und vierten Grades; 1545 veröffentlichte er sein Buch *Ars Magna,* in dem er die auf TARTAGLIA und CARDANOs Diener FERRARI zurückgehenden Lösungsformeln präsentierte, 1552 erhielt er einen Lehrstuhl für Medizin an der Universität Pavia, beschäftigte sich aber weiterhin auch mit mathematischen und naturwissenschaftlichen Fragen.

Mit dieser Formel gab es dann allerdings ein weiteres Problem: Oft tauchten in der Lösungsformel, selbst bei Gleichungen mit lauter reellen Lösungen, Quadratwurzeln negativer Zahlen auf. CARDANO umging dieses Problem, indem er mit diesen Ausdrücken, die er eigentlich für sinnlos hielt, so rechnete, als seien sie Zahlen – und damit war er wohl der erste, der (wenn auch nur selten) mit komplexen Zahlen rechnete.

Er blieb auch lange Zeit der einzige, denn sein Ansatz, die Wurzeln auch negativer Zahlen nach den gewohnten Rechenregeln zu behandeln, führte schnell zu Widersprüchen wie etwa der Schlußfolgerung

$$\frac{-1}{1} = \frac{1}{-1} \Longrightarrow \sqrt{\frac{-1}{1}} = \sqrt{\frac{1}{-1}} \Longrightarrow \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}$$
$$\Longrightarrow \left(\sqrt{-1}\right)^2 = \left(\sqrt{1}\right)^2 \Longrightarrow -1 = 1\,.$$

Erst rund zwei Jahrhunderte später, dann aber fast gleichzeitig und voneinander unabhängig durch mehrere Mathematiker, gelang es, das Rechnen mit komplexen Zahlen auf eine tragfähige Grundlage zu stellen.

Bei der Erweiterung eines Zahlbereichs wollen wir die alten Rechenregeln soweit wie möglich beibehalten. Eine dieser Regeln besagt, daß $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ist. Falls diese Regel auch für negative a gelten soll, ist für $b > 0$

$$\sqrt{-b} = \sqrt{(-1) \cdot b} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{b}\,;$$

es reicht dann also, eine einzige neue Zahl i einzuführen, um alle Wurzeln negativer Zahlen als reelle Vielfache dieser Zahl darzustellen. Diese eine Zahl bezeichnen wir als die *imaginäre Einheit* i. Wir betrachten sie einfach als ein Symbol, und rechnen damit nach der Regel $i^2 = -1$.

Da wir mit den neuen Zahlen auch rechnen wollen, müssen wir auch für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ den Ausdruck $a+bi$ als Zahl betrachten; da diese Art von Zahlen aus zwei Teilen zusammengesetzt sind, redet man von *komplexen Zahlen.* In der Terminologie der heutigen Mathematik können wir definieren

DEFINITION: *Die Menge* $\mathbb{C}$ *der komplexen Zahlen ist der zweidimensionale Vektorraum* $\mathbb{C} = \mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}i$ *mit ausgezeichneter Basis* $\{1\,, i\}$.

Damit können wir komplexe Zahlen insbesondere addieren; nach den Regeln der Vektoraddition ist

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i\,.$$

Eine Multiplikation, die den üblichen Rechenregeln genügt, muß nach dem Distributivgesetz insbesondere $\mathbb{R}$-linear in beiden Argumenten sein; um die Multiplikation mit $a+bi$ als Abbildung von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ zu definieren, genügt es also, die Bilder der beiden Basisvektoren 1 und i anzugeben. 1 soll natürlich das Neutralelement bezüglich der Multiplikation sein, d.h.

$$(a+bi)\cdot 1 = a+bi\,.$$

Um das Bild von i festzulegen, beachten wir, daß $i^2=-1$ sein soll und die üblichen Rechenregeln weiterhin gelten sollen; dies führt auf die Definition

$$(a+bi)\cdot i = -b+ai\,.$$

Wegen der $\mathbb{R}$-Linearität führt das auf die Multiplikationsabbildung

$$\cdot : \begin{cases} \quad\mathbb{C} \quad\times\quad \mathbb{C} \quad\to \qquad\qquad \mathbb{C} \\ \big((a_1+b_1i)\;,\;(a_2+b_2i)\big) \mapsto (a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i\,. \end{cases}$$

Damit ist $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$ definiert zusammen mit einer Multiplikationsabbildung $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$. Diese ist offensichtlich kommutativ, denn wenn wir in obiger Formel die Indizes vertauschen, ändert sich nichts am Wert der rechten Seite. Um zu sehen, daß sie auch assoziativ ist, betrachten wir für ein festes $c=a+ib\in\mathbb{C}$ die Multiplikation mit c, also die Abbildung

$$\mu_c\colon \begin{cases} \mathbb{C}\to\mathbb{C} \\ \;z\mapsto cz \end{cases}\,.$$

Nach Definition der Multiplikation ist diese Abbildung $\mathbb{R}$-linear, und offensichtlich ist $\mu_c\circ\mu_d=\mu_{cd}$. Für $c,d,e\in\mathbb{C}$ ist daher

$$\mu_{(cd)e}=\mu_{cd}\circ\mu_e=(\mu_c\circ\mu_d)\circ\mu_e=\mu_c\circ(\mu_d\circ\mu_e)=\mu_c\circ\mu de=\mu_{c(de)}\,,$$

denn die Hintereinanderausführung von Abbildungen ist assoziativ und eine komplexe Zahl w ist durch die Abbildung μ_w eindeutig bestimmt, da $w=\mu_w(1)$ ist.

Bezüglich der Basis $\{1, i\}$ des $\mathbb{R}$-Vektorraus $\mathbb{C}$ hat μ_c für $c = a + ib$ wegen $\mu_c(1) = a + ib$ und $\mu_c(i) = -b + ai$ die Abbildungsmatrix

$$M_c = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} .$$

Ihre Determinante $\det M_c = a^2 + b^2$ verschwindet genau dann, wenn a und b beide verschwinden, d.h. für $c = 0$. In allen anderen Fällen ist M_c invertierbar. Um zu sehen, daß es dann eine komplexe Zahl c^{-1} gibt derart, daß $c^{-1} \cdot c = 1$ ist, führen wir zunächst einige neue Begriffe ein:

DEFINITION: *a) Ist $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ eine komplexe Zahl, so bezeichnen wir die reelle Zahl $x = \mathfrak{Re}\, z$ als den* Realteil *von z und $y = \mathfrak{Im}\, z$ als den* Imaginärteil.
b) Die Zahl $\overline{z} = x - iy$ heißt die zu z konjugiert komplexe *Zahl. c) Die nichtnegative Wurzel $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ heißt* Betrag *von z.*

Die Abbildung

$$\overline{} : \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \overline{z} \,. \end{cases}$$

ist offensichtlich $\mathbb{R}$-linear; darüber hinaus rechnet man leicht nach, daß sie auch mit der Multiplikation verträglich ist, d.h.

$$\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w} \quad \forall z, w \in \mathbb{C} \,.$$

Genauso einfach folgt, daß für $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$z\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$

ist; der Betrag einer komplexen Zahl ist also gleich der Länge des ihr entsprechenden Vektors $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$.

Für eine komplexe Zahl $c \neq 0$ ist $|c|$, wie wir gesehen haben, eine von Null verschiedene reelle Zahl; daher ist $\overline{c}/|c|^2$ eine wohldefinierte komplexe Zahl mit

$$\left(\frac{\overline{c}}{|c|^2}\right) \cdot c = \frac{\overline{c}c}{|c|^2} = 1 \quad \text{und} \quad c \cdot \left(\frac{\overline{c}}{|c|^2}\right) = \frac{c\overline{c}}{|c|^2} = 1 \,.$$

Somit ist c invertierbar mit

$$c^{-1} = \frac{\overline{c}}{|c|^2}\,.$$

Zusammenfassend haben damit bewiesen

Satz 1.1: $\mathbb{C}$ *ist ein Körper.* ∎

Das Zusammenspiel zwischen den komplexen Zahlen $a + ib$ und den Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ wird im folgenden noch gelegentlich nützlich sein; deshalb sei es zum Abschluß dieses Paragraphen noch in einem weiteren Satz zusammengefaßt:

Lemma 1.2: *Die Abbildung $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, die einer komplexen Zahl $c = a + ib$ die Matrix $M_c = \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ zuordnet, ist ein Isomorphismus von $\mathbb{C}$ auf den Ring aller Matrizen dieser Form, der somit auch ein Körper ist.*

Beweis: Die Bijektivität ist trivial, es geht also nur darum, daß φ ein Homomorphismus sein muß. $\varphi(c_1c_2)$ ist die Matrix zur linearen Abbildung $z \mapsto (c_1c_2)z$, die man auch als Hintereinanderausführung der Abbildungen $z \mapsto c_1z$ und $z \mapsto c_2z$ auffassen kann. Diese sind durch die Matrizen $\varphi(c_1)$ und $\varphi(c_2)$ gegeben, ihre Hintereinanderausführung also durch deren Produkt. Entsprechend ist $\varphi(c_1+c_2) = \varphi(c_1)+\varphi(c_2)$, da die Addition von c_1 und c_2 der Addition der dazugehörigen Abbildungen entspricht, und diese wiederum der Matrizensumme. ∎

§2. Konvergenz und Stetigkeit im Komplexen

Betrachten wir als nächstes die topologischen Eigenschaften von $\mathbb{C}$. Da der Betrag einer komplexen Zahl z nichts anderes ist als die euklidische Norm des Vektors z, wiederholen die folgenden Definitionen einfach in neuer Formulierung die entsprechenden Definitionen aus der Analysis. (Je nachdem, welche Definition Sie in der Analysis gehört haben, müssen Sie möglicherweise noch die Äquivalenz von euklidischer Norm und Maximumsnorm in $\mathbb{R}^2$ benutzen um zu sehen, daß diese Definitionen nur Umformulierungen der altbekannten sind.)

Definition: *a) Eine Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *komplexer Zahlen konvergiert gegen die komplexe Zahl* $a \in \mathbb{C}$, *wenn es für jedes (reelle)* $\varepsilon > 0$ *ein* $N \in \mathbb{N}$ *gibt, so daß* $|a - a_n| < \varepsilon$ *für alle* $n \geq N$. *Die Folge heißt konvergent, wenn sie gegen ein* $a \in \mathbb{C}$ *konvergiert.*
b) Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ *heißt offen, wenn es zu jedem* $z \in U$ *ein* $\varepsilon > 0$ *gibt, so daß jedes* $w \in \mathbb{C}$ *mit* $|z - w| < \varepsilon$ *ebenfalls in* U *liegt. Eine Teilmenge* $A \subset \mathbb{C}$ *heißt abgeschlossen, falls* $\mathbb{C} \setminus A$ *offen ist.*
c) Eine Funktion $f: U \to \mathbb{C}$ *heißt stetig auf der offenen Teilmenge* $U \subset \mathbb{C}$, *wenn es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *gibt, so daß für alle* $z, w \in U$ *gilt:*

$$|z - w| < \delta \Rightarrow \bigl|f(z) - f(w)\bigr| < \varepsilon\,.$$

Da die Definitionen die gleichen sind wie in der Analysis, gelten auch die üblichen Sätze, insbesondere beispielsweise das

Konvergenzkriterium von Cauchy: *Die Folge komplexer Zahlen* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist genau dann konvergent, wenn es für jedes* $\varepsilon > 0$ *ein* $N \in \mathbb{N}$ *gibt, so daß* $|a_n - a_m| < \varepsilon$ *für alle* $n, m > N$.

Der Begriff der *absoluten Konvergenz* hat in $\mathbb{C}$ eine etwas andere Bedeutung als in $\mathbb{R}$, auch wenn die Definition formal dieselbe ist:

Definition: *Die Reihe* $\displaystyle\sum_{n=r}^{\infty} a_n$ *mit* $a_n \in \mathbb{C}$ *und* $r \in \mathbb{Z}$ *heißt absolut konvergent, wenn die Reihe* $\displaystyle\sum_{n=r}^{\infty} |a_n|$ *konvergiert.*

(Im Hinblick auf spätere Anwendungen lassen wir die Summation mit einem beliebigen ganzzahligen Index r beginnen.)

Trotzdem gilt auch hier:

Lemma 1.3: *a) Falls die Reihe* $\displaystyle\sum_{n=r}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent ist, ist sie auch konvergent.*
b) Die Summe einer absolut konvergenten Reihe ist unabhängig von der Reihenfolge der Summanden.

Der *Beweis* von *a)* folgt wie im reellen Fall aus dem CAUCHYschen Konvergenzkriterium zusammen mit der Dreiecksungleichung (die hier im Komplexen wirklich eine Eigenschaft von Dreiecken ausdrückt): Da eine Reihe nach Definition genau dann konvergiert, wenn die Folge der Teilsummen konvergiert, ist $\sum_{n=r}^{\infty} a_n$ nach CAUCHY genau dann absolut konvergent, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $\big||a_n| + \cdots + |a_{n+k}|\big| < \varepsilon$ für alle $n > N$ und alle $k \in \mathbb{N}$. Wegen

$$|a_n + \cdots + a_{n+k}| \le |a_n| + \cdots + |a_{n+k}| = \big||a_n| + \cdots + |a_{n+k}|\big|$$

ist dann auch $|a_n + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon$, die Reihe konvergiert also nach dem Konvergenzkriterium von CAUCHY.

Zum Beweis von *b)* sei σ eine bijektive Abbildung von $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \ge r\}$ auf sich selbst; wir müssen einsehen, daß $\sum_{n=r}^{\infty} a_n = \sum_{n=r}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ ist. Dazu betrachten wir die beiden Teilsummen $s_k = \sum_{n=r}^{k} a_n$ und $s'_k = \sum_{n=r}^{k} a_{\sigma(n)}$ und ein $\varepsilon > 0$. Wegen der absoluten Konvergenz der Reihe gibt es ein N, so daß $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$, und dazu wiederum sei M die größte ganze Zahl m, für die $\sigma(m) \le N$ ist. Wegen der Bijektivität von σ ist natürlich $M \ge N$. Weiter ist $\sum_{n=M+1}^{\infty} |a_{\sigma(n)}|$ eine Teilsumme von $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$, also ebenfalls kleiner als ε. Für jedes $k > M$ besteht daher $s_k - s'_k$ nur aus Termen $\pm a_n$ mit $n > N$, d.h.

$$|s_k - s'_k| \le \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| < \varepsilon \text{ für jedes } k > M\,.$$

Also ist $\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} s'_k$, wie behauptet.

■

Als erstes Beispiel für die Anwendung dieses Lemmas betrachten wir die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\,.$$

Diese Reihe ist für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent, denn

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z^n}{n!}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$$

konvergiert, wie aus der reellen Analysis bekannt ist, gegen $e^{|z|}$. Also konvergiert die Reihe für jedes $z \in \mathbb{C}$ gegen eine komplexe Zahl, die wir vorläufig mit $\exp(z)$ bezeichnen wollen.

LEMMA 1.4: *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ ist* $\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$.

Beweis: Da die Potenzreihen von $\exp(z)$ und $\exp(w)$ absolut konvergent sind, können wir ausmultiplizieren und neu zusammenfassen:

$$\begin{aligned}
\exp(z) \cdot \exp(w) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{z^j w^k}{j!k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} \frac{z^j w^k}{j!k!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{z^j w^{n-j}}{j!(n-j)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} z^j w^{n-j} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \exp(z+w) \,.
\end{aligned}$$

■

Somit verhält sich die Funktion $\exp(z)$ auch im Komplexen genau so, wie man es von einer Potenz erwartet; wir werden daher in Zukunft meist wie im Reellen $\exp(z) = e^z$ schreiben. Um Funktionswerte für komplexe Argumente $z = x + iy$ explizit zu berechnen, wenden wir zunächst das Lemma an, wonach $e^z = e^x e^{iy}$ ist, und müssen dann nur noch e^{iy} berechnen. Da die Reihe absolut konvergiert, dürfen wir beliebig umordnen. Insbesondere können wir zuerst über alle Terme mit geradem Index summieren und dann über alle mit ungeradem; dies führt auf

$$\begin{aligned}
e^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell \frac{y^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} = \cos y + i \sin y \,,
\end{aligned}$$

wir erhalten also die

FORMEL VON EULER: $e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y)$.

Da bei den obigen Umformungen nirgends benutzt wurde, daß y eine reelle Zahl sein soll, gelten diese Formeln auch für komplexe Argumente, falls wir für beliebige komplexe Zahlen z definieren

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{und} \qquad \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\,.$$

Beide Reihen sind absolut konvergent, denn die Reihen der Beträge haben beide die reelle Exponentialreihe als konvergente Majorante.

In der Formeln von EULER liegt übrigens einer der Hauptgründe für die große Bedeutung der Funktionentheorie in der Physik und Elektrotechnik, denn diese Formeln gestatten es, statt mit trigonometrischen Funktionen und deren verschachtelten Additionstheoremen mit der Exponentialfunktion und Lemma 1.4 zu rechnen. Dabei wird oft sogar ein eigentlich „reelles Problem“ künstlich komplex gemacht, wobei dann etwa der Realteil der komplexen Lösung gleich der gesuchten reellen Lösung ist, während der Imaginärteil keine für das Problem relevante Bedeutung hat. So wird beispielsweise in der Optik eine Welle meist in der Form $\psi = \psi_0 e^{\omega t - \varphi_0}$ geschrieben, obwohl sie nur ein eindimensionales reelles Phänomen beschreiben soll.

SATZ 1.5: *a) Die komplexe Exponentialfunktion $z \mapsto e^z$ bildet den Streifen $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \le \mathfrak{Im}\, z < 2\pi\}$ bijektiv ab auf $\mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$.*
b) Jede komplexe Zahl z läßt sich in der Form $z = re^{i\varphi}$ darstellen mit reellen Zahlen $r \ge 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$, die für $z \ne 0$ eindeutig bestimmt sind. Insbesondere ist $r = |z|$.

Beweis: a) Da die Exponentialfunktion keine reelle Nullstelle hat und Sinus und Kosinus keine gemeinsame reelle Nullstelle haben, kann

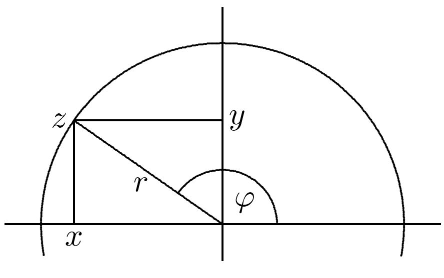
$$e^z = e^{\mathfrak{Re}\, z}\big(\cos(\mathfrak{Im}\, z) + i\sin(\mathfrak{Im}\, z)\big)$$

nie Null sein; das Bild der Exponentialfunktion liegt also in $\mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$. Ist $e^z = e^w$, so ist $e^{z-w} = 1$. Sei $z - w = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann ist $e^x\big(\cos(y) + i\sin(y)\big) = 1$, also $\sin(y) = 0$ und damit $y = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist aber $\cos(y) = (-1)^k$; wegen $e^x > 0$ muß k gerade sein und $e^x = 1$, also $x = 0$. Mithin unterscheiden sich z und w nur im Imaginärteil, und dort um ein Vielfaches von 2π; im angegebenen Streifen ist die Exponentialfunktion also injektiv. Zum Nachweis der Surjektivität empfiehlt es sich, zunächst *b)* zu zeigen: Für $z = 0$ ist die Behauptung trivial; für $z \neq 0$ ist $w = z/|z| = u+iv$ eine komplexe Zahl vom Betrag Eins, d.h. $u^2 + v^2 = 1$. Da der Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$ durch

$$[0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2; \quad \varphi \mapsto \bigl(\cos(\varphi), \sin(\varphi)\bigr)$$

in eineindeutiger Weise parametrisiert wird, gibt es ein eindeutig bestimmtes $\varphi \in [0, 2\pi)$, so daß $e^{i\varphi} = w$ ist; mit $r = |z|$ ist also $z = re^{i\varphi}$. Insbesondere ist dann $z = e^{\log r + i\varphi}$, womit die Surjektivitätsaussage aus *a)* bewiesen wäre. Aus der dortigen Injektivitätsaussage und der Injektivität der reellen Exponentialfunktion folgt schließlich noch die in *b)* behauptete Eindeutigkeit. ■

Damit gibt es außer der „kartesischen" Darstellung $z = x + iy$ einer komplexen Zahl auch noch die „Polarkoordinatendarstellung" $z = re^{i\varphi} = r\bigl(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\bigr)$, wobei φ als Winkel nur modulo 2π bestimmt ist, beziehungsweise, im Falle $z = 0$, völlig beliebig gewählt werden kann.



Definition: *Für eine komplexe Zahl $z = re^{i\varphi} \neq 0$ heißt $\varphi = \arg z$ das* Argument *von z.*

Die Polarkoordinatendarstellung ist für die Addition komplexer Zahlen schlecht geeignet; bei der Multiplikation ist sie aber deutlich einfacher als die kartesische Darstellung, denn

$$re^{i\varphi} \cdot se^{i\psi} = rse^{i(\varphi+\psi)} .$$

Dramatisch wird die Vereinfachung gegenüber der kartesischen Darstellung bei der Berechnung von Potenzen und vor allem Wurzeln, denn

$$\left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi}\,.$$

Umgekehrt ist natürlich $w = \sqrt[n]{r}e^{i\varphi/n}$ eine Lösung der Gleichung $w^n = z = re^{i\varphi}$, allerdings nicht die einzige: Da sich z auch in der Form $z = re^{i(\varphi+2k\pi)}$ schreiben läßt, sind auch die Zahlen

$$w_k = \sqrt[n]{r}e^{i(\varphi+2k\pi)/n} = \sqrt[n]{r}e^{i\varphi/n+2k\pi/n} = \sqrt[n]{r}e^{i\varphi/n}\zeta_n^k$$

mit $\zeta_n = e^{2\pi/n}$ Lösungen. ζ_n erfüllt die Gleichung $\zeta_n^n = 1$; die Zahlen $\zeta_n, \zeta_n^2, \dots, \zeta_n^{n-1}$ sind also die sämtlichen Lösungen der Gleichung $w^n = 1$, die n-ten *Einheitswurzeln.* Allgemein gilt somit

LEMMA 1.6: *Für eine komplexe Zahl $z \neq 0$ hat die Gleichung $w^n = z$ genau n verschiedene Lösungen; ist $z = re^{i\varphi}$, so sind dies die Zahlen*

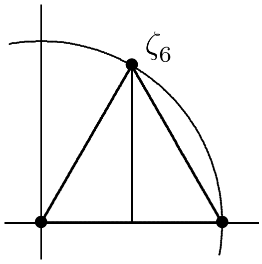
$$w_k = \sqrt[n]{r}e^{i\varphi/n+2k\pi/n} \quad \text{für } k = 0, \dots, n-1\,.$$

■

Im allgemeinen ist es nur schwer möglich, die w_k ohne trigonometrische Funktionen in kartesischer Form darzustellen. Lediglich in einigen einfachen Fällen liefert die Elementargeometrie entsprechende Darstellungen. Ein Beispiel dafür ist die Gleichung $w^6 = 27$. Nach obigem Lemma hat sie die Lösungen

$$w_k = \sqrt[6]{27}e^{2k\pi/6} = \sqrt{3}\,\zeta_6^k \quad \text{für} \quad k = 0, \dots, 5\,.$$

In kartesischen Koordinaten ist $\zeta_6 = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)$; im Gradmaß ist $\pi/3$ der Winkel $60°$, wir müssen also dessen Sinus und Kosinus ausrechnen. Dazu betrachten wir in der komplexen Zahlenebene das Dreieck mit den Eckpunkten $0, 1$ und ζ_6.



Da 1 und ζ_6 auf dem Einheitskreis liegen, haben die Seiten von 0 bis 1 und von 0 bis ζ_6 beide die Länge 1; da diese Seiten einen Winkel von sechzig Grad einschließen, ist das Dreieck sogar gleichseitig. Ist also $\zeta_6 = u + iv$ mit $u, v \in \mathbb{R}$, so ist das Lot von ζ_6 auf die x-Achse eine Mittelsenkrechte des Dreiecks, der Fußpunkt u ist also $1/2$. Da v positiv ist und $u^2 + v^2 = 1$, folgt, daß $v = \sqrt{1 - 1/4} = \sqrt{3}/2$. Damit ist $\zeta_6 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$, also $w_1 = w_0\zeta_6 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 3i)$. Genauso lassen sich die übrigen w_k berechnen.

Ohne trigonometrische Funktionen lassen sich Wurzeln oft nicht in der Form Realteil plus i mal Imaginärteil schreiben; lediglich für Quadratwurzeln ist das stets einfach möglich: Wenn das Quadrat von $w = u + iv$ gleich $r = p + iq$ ist, muß $p = u^2 - v^2$ und $q = 2uv$ sein. Wir kennen daher die Summe p und das Produkt $-q^2/4$ der beiden Zahlen u^2 und $-v^2$. Wenn wir Summe und Produkt zweier Zahlen a und b kennen, können wir diese leicht bestimmen als Lösungen einer quadratischen Qleichung, denn

$$(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab\,.$$

u^2 und $-v^2$ sind also die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - px - q^2/4 = 0$, d.h.

$$u = \pm\sqrt{\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{p^2 + q^2}} \quad \text{und} \quad v = \frac{y}{2u}\,.$$

Kapitel 2: Holomorphe Funktionen

Holomorphe Funktionen sind die Funktionen, die man problemlos differenzieren, integrieren und in Potenzreihen entwickeln kann. Wie wir im Laufe dieses Paragraphen sehen werden, sind alle drei Eigenschaften sogar äquivalent; jetzt am Anfang soll holomorph einfach *komplex differenzierbar* bedeuten. (Historisch betrachtet verlangte man von einer holomorphen Funktion, daß sie sogar komplex stetig differenzierbar ist, aber wie wir bald sehen werden, ist das bei einer komplex differenzierbaren Funktion automatisch der Fall.)

Definition: *U sei eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$. Eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ heißt holomorph im Punkt $z \in U$, wenn der Grenzwert*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

existiert; dieser Grenzwert wird dann als die Ableitung $f'(z) = \frac{df}{dz}(z)$ von f in z bezeichnet. f heißt holomorph im U, wenn es in jedem Punkt von U holomorph ist.

Der wesentliche Unterschied zum Reellen besteht darin, daß h hier eine komplexe Zahl ist, h kann also nicht nur auf der reellen Achse von links oder rechts nach Null gehen, sondern aus beliebiger Richtung. Dies weist schon darauf hin, daß Differenzierbarkeit im Komplexen eine stärkere Einschränkung ist als im Reellen.

Bemerkung: Genau wie im Reellen kann die Forderung, daß U offen sein soll, abgeschwächt werden: Zur Definition des Grenzwerts reicht es, daß jeder Punkt $z \in U \subseteq \mathbb{C}$ Häufungspunkt von U ist; dann gibt es nichtkonstante Nullfolgen $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ derart, daß alle $z+h_n$ in U liegen, so daß wir das Konvergenzverhalten dieser Folgen betrachten können.

Triviale Beispiele für differenzierbare Funktionen sind, genau wie im Reellen, die konstanten Funktionen (mit der Nullfunktion als Ableitung) und die Identität $z \mapsto z$, mit der konstanten Funktion $z \mapsto 1$ als Ableitung. Wie im Reellen rechnet man sofort nach, daß auch Summen und Produkte holomorpher Funktionen wieder holomorph sind und den aus der reellen Analysis bekannten Summen- und Produktregeln genügen: Für zwei holomorphe Funktionen $f, g\colon U \to \mathbb{C}$ ist

$$\begin{aligned}(f+g)'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(z+h)-(f+g)(z)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)+g(z+h)-f(z)-g(z)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(z+h)-g(z)}{h} = f'(z)+g'(z)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(fg)'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(z+h)-(fg)(z)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)g(z+h)-f(z+h)g(z)+f(z+h)g(z)-f(z)g(z)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(f(z+h)\frac{g(z+h)-g(z)}{h} + \frac{f(z+h)-f(z)}{h} g(z)\right) \\ &= f(z)g'(z)+f'(z)g(z)\,.\end{aligned}$$

Daraus folgt sofort, daß auch alle Polynomfunktionen holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ sind und ihre „gewohnten“ Ableitungen haben.

Auch Beispiele nichtholomorpher Funktionen können leicht angegeben werden: Beispielsweise kann der obige Grenzwert natürlich nur für stetige Funktionen existieren, so daß jede unstetige Funktion nichtholomorph ist. Stetig und trotzdem nicht holomorph ist etwa die komplexe Konjugation, denn $\lim_{h\to 0} \frac{\overline{z+h}-\overline{z}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{h}}{h}$, und dieser Grenzwert existiert natürlich nicht: In der Polarkoordinatendarstellung $h = re^{i\varphi}$ ist $\frac{\overline{h}}{h} = e^{-2i\varphi}$, und φ muß für $h \to 0$ keinen Grenzwert haben.

Um eine erste notwendige Bedingung für die Holomorphie einer Funktion zu bekommen, betrachten wir die Spezialfälle, daß h auf der reellen *bzw.* komplexen Achse gegen Null geht. Sei dazu $z = x + iy$ und $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ mit reellen Funktionen $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Für ein reelles h ist dann

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \\
=&\lim_{h\to 0} \left(\frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} + i\, \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h} \right) \\
=&\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y)\,,
\end{aligned}$$

während für ein imaginäres $h = ik$ mit $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \\
=&\lim_{k\to 0} \left(\frac{u(x, y+k) - u(x, y)}{ik} + i\, \frac{v(x, y+k) - v(x, y)}{ik} \right) \\
=&-i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)\,.
\end{aligned}$$

Also müssen u und v reell differenzierbar sein und es muß gelten:

CAUCHY-RIEMANNSCHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

Das ist auch bereits hinreichend, es gilt also

LEMMA 2.1: *Die Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ mit $f(x+iy) = u(x, y)+iv(x, y)$ ist genau dann holomorph, wenn u und v differenzierbar sind und den* CAUCHY-RIEMANN*schen Differentialgleichungen genügen.*

Beweis: Wenn u und v differenzierbar sind, ist auch f im Sinne der reellen Analysis differenzierbar, es gibt also eine 2×2-Matrix $J_f(z)$, die JACOBI-Matrix, so daß für jedes $h = h_x + ih_y$ gilt

$$f(z+h) = f(z)+J_f(z)\begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix}+o\big(|h|\big), \;\; J_f(z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}.$$

Die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen besagen nun gerade, daß diese Matrix die spezielle Gestalt aus Lemma 1.2 hat, es gibt also eine komplexe Zahl c, so daß $J_f(z)$ Abbildungsmatrix der Multiplikation mit c ist, also die Matrix, die wir im ersten Kapitel mit M_c bezeichneten. Somit ist $f(z+h) = f(z) + ch + o\big(|h|\big)$, und daraus folgt sofort, daß f in z holomorph ist mit $f'(z) = c$. ■

Baron AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789–1857) stellte als erster durch die exakte Definition von Begriffen wie Konvergenz und Stetigkeit die Analysis auf ein sicheres Fundament. In insgesamt 789 Arbeiten beschäftigte er sich u.a. auch mit komplexer Analysis, Variationsrechnung, Differentialgleichungen, FOURIER-Analysis, Permutationsgruppen, der Diagonalisierung von Matrizen und der theoretischen Mechanik. Als überzeugter Royalist hatte er häufig Schwierigkeiten mit den damaligen Regierungen; er lebte daher mehrere Jahre im Exil in Turin und später in Prag, wo er (mit sehr mäßigem Erfolg) den französischen Thronfolger unterrichtete.

GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (1826-1866) war Sohn eines lutherischen Pastors und schrieb sich 1846 auf Anraten seines Vaters an der Universität Göttingen für das Studium der Theologie ein. Schon bald wechselte an die Philosophische Fakultät, um dort unter anderem bei GAUSS Mathematikvorlesungen zu hören. Nach Promotion 1851 und Habilitation 1854 erhielt er dort 1857 einen Lehrstuhl. Trotz seines frühen Todes initiierte er grundlegende auch noch heute fundamentale Entwicklungen in der Geometrie, der Zahlentheorie und über abelsche Funktionen. Seine Vermutung über die Nullstellen der (heute als RIEMANNsch bezeichneten) ζ-Funktion ist die berühmteste offene Vermutung der heutigen Mathematik.

Für zwei Funktionen f, g, die Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ so nach $\mathbb{R}^2$ abbilden, daß die Komposition $f \circ g$ definiert ist, gilt bekanntlich die Kettenregel

$$J_{f\circ g}(z) = J_f\big(g(z)\big) \cdot Jg(z)\,;$$

daher gilt auch im Komplexen die

KETTENREGEL: $(f \circ g)'(z) = f'\big(g(z)\big) \cdot g'(z)$.

Zusammen mit der Tatsache, daß

$$\lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{z+h} - \dfrac{1}{z}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{z(z+h)} = -\frac{1}{z^2}$$

für alle $z \neq 0$, folgt daraus, daß auch alle rationalen Funktionen überall dort holomorph sind, wo ihr Nenner nicht verschwindet, und daß auch sie die „gewohnten“ Ableitungen haben.

Als erste Anwendung der CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen können wir die Exponentialfunktion untersuchen: Für eine komplexe Zahl $z = x + iy$ ist

$$e^z = e^x \cos y + i \cdot e^x \sin y = u(x,y) + iv(x,y)$$

mit $u(x,y) = e^x \cos y$ und $v(x,y) = e^x \sin y$. Natürlich ist $\frac{\partial u}{\partial x} = u$ und $\frac{\partial v}{\partial x} = v$. Die partiellen Ableitungen nach y sind

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -v = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

und

$$\frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y = u = \frac{\partial u}{\partial x}\,,$$

genau wie es die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen verlangen. Damit ist die Exponentialfunktion differenzierbar, und natürlich ist sie, wie im Reellen, gleich ihrer eigenen Ableitung.

Bevor wir uns weiter mit der Differenzierbarkeit befassen, empfiehlt es sich, zunächst die Integrierbarkeit zu betrachten.

Definition: *$f: U \to \mathbb{C}$ sei eine auf einer offenen Teilmenge U von $\mathbb{C}$ definierte Funktion. Falls es dazu eine auf U holomorphe Funktion $F: U \to \mathbb{C}$ gibt, so daß $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in U$, bezeichnen wir F als eine Stammfunktion von f.*

Auch Integrale werden wie üblich definiert: Ist zunächst $f: [a,b] \to \mathbb{C}$ auf einem reellen Intervall $[a,b]$ definiert, so soll $\int_a^b f(t)\,dt$ der Limes der Summen

$$\sum_{j=0}^{n-1} f(t_j)(t_{j+1} - t_j)$$

sein, sofern dieser existiert, wobei der Grenzwert über alle Unterteilungen $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ von $[a,b]$ gebildet wird mit $n \to \infty$ und $\sup |t_{j+1} - t_j| \to 0$. Da die t_j reell sind, kann man die obigen Summen leicht in Real- und Imaginärteile zerlegen und erhält die Formel

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \mathfrak{Re}\, f(t)\,dt + i \int_a^b \mathfrak{Im}\, f(t)\,dt\,.$$

Falls f eine Stammfunktion F hat, ist auch $\mathfrak{Re}\, F$ eine Stammfunktion von $\mathfrak{Re}\, f$ und $\mathfrak{Im}\, F$ eine Stammfunktion von $\mathfrak{Im}\, f$, nach dem (reellen) Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt also auch hier $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

Normalerweise möchten wir nicht über reelle Intervalle integrieren sondern entlang von Kurven in der komplexen Zahlenebene. Dazu definieren wir

Definition: *a) Ein Integrationsweg ist eine stetige und stückweise stetig differenzierbare Abbildung $\gamma: [a,b] \to U$ eines reellen Intervalls in eine offene Teilmenge U von $\mathbb{C}$. Die Punktmenge $|\gamma| = \gamma\big([a,b]\big)$ heißt Träger von γ. Falls $\gamma(a) = \gamma(b)$ ist, heißt γ ein geschlossener Integrationsweg oder eine geschlossene Kurve.*
b) Der Integrationsweg $-\gamma$ zu einem Integrationsweg $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ ist der Integrationsweg $[a,b] \to \mathbb{C}$ mit $t \mapsto \gamma(a+b-t)$.

c) Für einen Integrationsweg γ und eine stetige Funktion $f\colon |\gamma| \to \mathbb{C}$ ist $\int_\gamma f(z)\,dz$ der Limes der Summen

$$\sum_{j=0}^{n-1} f\big(\gamma(t_j)\big)\big(\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\big)\,,$$

gebildet über alle Unterteilungen $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ von $[a,b]$ für $n \to \infty$ und $\sup |t_{j+1} - t_j| \to 0$.

Die Existenz des Grenzwerts ist hier kein Problem, denn

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{n-1} f\big(\gamma(t_j)\big)\big(\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\big)\\ =&\sum_{j=0}^{n-1} f\big(\gamma(t_j)\big)\frac{\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)}{t_{j+1} - t_j}(t_{j+1} - t_j)\end{aligned}$$

konvergiert wegen der Stetigkeit von f und der stückweisen Differenzierbarkeit von γ; wir erhalten

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,dt\,,$$

wobei die endlich vielen Werte, für die $\gamma'(t)$ nicht existiert, natürlich vernachlässigt werden können. Als unmittelbare Folgerung aus dieser Formel erhalten wir die Beziehung

$$\int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz\,.$$

Lemma 2.2: *Eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn es zu je zwei Punkten $z, w \in U$ einen Integrationsweg $\gamma\colon [a,b] \to U$ gibt mit $\gamma(a) = z$ und $\gamma(b) = w$.*

Beweis: Sei zunächst U zusammenhängend. Wir wählen einen festen Punkt $z \in U$ und betrachten die Menge V aller Punkte $w \in U$, die durch einen Integrationsweg mit z verbunden werden können. Diese Menge ist offen, denn jedes $w \in V$ hat in U eine ε-Umgebung, deren Punkte durch Radien mit w verbunden werden können; ein Integrationsweg von z nach w läßt sich also bis zu jedem dieser Punkte verlängern. Das Komplement $V \setminus U$ ist aber auch offen, denn auch jedes $w \in U \setminus V$ hat in U eine ε-Umgebung, und wenn ein Punkt aus dieser ε-Umgebung durch einen Integrationsweg mit z verbunden werden kann, dann kann der Weg auch bis w fortgesetzt werden. Da U zusammenhängend ist, muß also V oder $U \setminus V$ leer sein; da V zumindest eine ε-Umgebung von z enthält, ist $U \setminus V = \emptyset$, also $U = V$.

Wenn sich umgekehrt je zwei Punkte $z, w \in U$ durch einen Integrationsweg $\gamma\colon [a,b] \to U$ mit $\gamma(a) = z$ und $\gamma(b) = w$ verbinden lassen, ist U zusammenhängend, denn wäre $U = V \cup W$ mit nichtleeren offenen Mengen V, W und läge $z \in V$, aber $w \in W$, so wäre auch $|\gamma| = (|\gamma| \cap V) \cup (|\gamma| \cap W)$ unzusammenhängend, was für das stetige Bild eines Intervalls natürlich absurd ist.

■

Definition: *Ein Gebiet G ist eine zusammenhängende offene Teilmenge von $\mathbb{C}$.*

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt auch im Komplexen, nämlich

Lemma 2.3: *$f\colon G \to \mathbb{C}$ sei stetig im Gebiet G und habe dort eine Stammfunktion $F\colon G \to \mathbb{C}$. Dann gilt für jeden Integrationsweg γ mit $|\gamma| \subset G$*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F\bigl(\gamma(b)\bigr) - F\bigl(\gamma(a)\bigr)\,.$$

Insbesondere hängt das Integral also nur von den Endpunkten von γ ab und verschwindet für einen geschlossenen Integrationsweg γ.

Zum *Beweis* können wir o.B.d.A. annehmen, daß γ im Innern seines Definitionsintervalls $[a,\, b]$ stetig differenzierbar ist: Gegebenenfalls zerlege man $[a,\, b]$ in endlich viele Teilintervalle, für die das gilt.

Dann ist $\mathfrak{Re}\, F \circ \gamma$ eine Stammfunktion von $(\mathfrak{Re}\, f \circ \gamma) \cdot \gamma'$, und entsprechendes gilt auch für die Imaginärteile, also ist

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\, dt = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big)\,.$$

■

Die Umkehrung dieses Lemmas gilt (im wesentlichen) auch; hier soll uns allerdings ein Spezialfall genügen, bei dem man eine Chance hat, die Voraussetzung auch wirklich nachzuweisen und das Lemma dann anzuwenden:

LEMMA 2.4: *G sei ein konvexes Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{C}$ sei eine in G stetige Funktion. Falls für jedes ganz in G liegende abgeschlossene Dreieck $\triangle$, dessen Rand vom Integrationsweg γ durchlaufen wird, das Integral $\int_\gamma f(z)\, dz$ verschwindet, hat f eine Stammfunktion F auf G.*

Beweis: $z_0 \in G$ sei beliebig aber fest gewählt, und für jedes $z \in G$ sei ℓ_z der Integrationsweg $\ell_z\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\ell_z(t) = tz + (1-t)z_0$, dessen Träger die Strecke von z_0 nach z ist und wegen der Konvexität von G ganz in G liegt. Der kanonische Kandidat für eine Stammfunktion ist natürlich

$$F(z) \underset{\text{def}}{=} \int_{\ell_z} f(\zeta)\, d\zeta\,.$$

Für $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $z + h \in G$ spannen die drei Punkte z_0, z und $z + h$ ein Dreieck $\triangle$ auf mit den Seiten $|\ell_z|$, $|\ell_{z+h}|$ und der Strecke von z nach $z + h$, zu der etwa der Integrationsweg $\gamma_h\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = z + th$ gehört. (Man überlege sich, daß die folgenden Beweisschritte richtig bleiben, wenn dieses Dreieck zu einer Strecke degeneriert.) Nach Voraussetzung ist das Integral über den Rand des

Dreiecks Null, also ist

$$F(z+h)-F(z)=\int_{\ell_{z+h}} f(z)\,dz-\int_{\ell_z} f(z)\,dz=\int_{\gamma_h} f(z)\,dz$$

$$=\int_0^1 f\bigl(\gamma_h(t)\bigr)\cdot h\,dt=h\cdot\int_0^1 f\bigl(\gamma_h(t)\bigr)\,dt\,.$$

Für $h\to 0$ konvergiert das rechte Integral gegen $f(z)$, da $\gamma_h(t)$ für alle t gegen z konvergiert. Somit existiert

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=f(z)\,,$$

und F ist eine Stammfunktion. ∎

Wie im Reellen folgt, daß das Kurvenintegral im wesentlichen nur vom Träger des Integrationswegs abhängt und von der Richtung, in der er durchlaufen wird; es gilt also

LEMMA 2.5: *$\gamma_1\colon[a,b]\to G$ und $\gamma_2\colon[c,d]\to G$ seien zwei Integrationswege im Gebiet G, für die es eine stückweise differenzierbare bijektive Funktion $\varphi\colon[c,d]\to[a,b]$ mit $\varphi(c)=a$ und $\varphi(d)=b$ gebe, so daß $\gamma_2=\gamma_1\circ\varphi$ ist. Dann ist für jede in G stetige Funktion $f\colon G\to\mathbb{C}$*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz=\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\,.$$

Beweis: Wie wir gerade nachgerechnet haben, ist

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz=\int_a^b f\bigl(\gamma_1(t)\bigr)\gamma_1'(t)\,dt$$

und

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz=\int_c^d f\bigl(\gamma_2(t)\bigr)\gamma_2'(t)\,dt=\int_c^d f\Bigl(\gamma_1\bigl(\varphi(t)\bigr)\Bigr)\gamma_1'\bigl(\varphi(t)\bigr)\varphi'(t)\,dt\,.$$

Nach der reellen Substitutionsregel, getrennt angewandt auf Real- und Imaginärteil, folgt daß beide Integrale gleich sind. ■

Nach diesem Lemma können wir beispielsweise, wenn wir das wollen, jeden Integrationsweg $\gamma\colon [a, b] \to G$ ersetzen durch einen Integrationsweg auf $[0, 1]$, zum Beispiel

$$\widetilde{\gamma}\colon \begin{cases} [0, 1] \to G \\ \qquad t \mapsto \gamma\bigl(a + t(b-a)\bigr) \end{cases},$$

und wir können auch leicht Integrationswege zusammensetzen: Sind $\gamma_1\colon [a, b] \to G$ und $\gamma_2\colon [c, d] \to G$ zwei Wege mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$, so kann der zusammengesetzte Weg beispielsweise parametrisiert werden durch

$$\gamma\colon \begin{cases} [0, 1] \to G \\ \qquad t \mapsto \begin{cases} \gamma_1\bigl(a + 2(b-a)t\bigr) & \text{für } t \le \frac{1}{2} \\ \gamma_2\bigl(c + 2(d-c)(t - \frac{1}{2})\bigr) & \text{für } t \ge \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}.$$

Entsprechend lassen sich auch mehrere Integrationswege zusammensetzen, und umgekehrt läßt sich ein Integrationsweg problemlos aufteilen in mehrere Wegstücke.

Lemma 2.5 sagt freilich nicht aus, daß das Integral nur von der Menge $\gamma\bigl([a, b]\bigr)$, also dem Träger von γ abhängt: Falls wir den Integrationsweg rückwärts durchlaufen, ändert das Integral, wie wir schon wissen, sein Vorzeichen, und wenn wir einen geschlossenen Integrationsweg γ mehrfach durchlaufen, erhalten wir ein Mehrfaches des Werts, den wir beim einmaligem Durchlauf erhalten. Deshalb ist φ in Lemma 2.5 als bijektiv vorausgesetzt und muß sowohl die Intervallanfänge als auch die Intervallenden aufeinander abbilden. Zusammen mit der Stetigkeit von φ folgt dann, daß φ streng monoton wächst, denn wäre für $t_1 < t_2$ nicht auch $\varphi(t_1) < \varphi(t_2)$, so wäre wegen der Bijektivität $c = \varphi(a) < \varphi(t_2) < \varphi(t_1)$. Nach dem Zwischenwertsatz gäbe es also ein $t_0 \in (a, t_1)$ mit $\varphi(t_0) = \varphi(t_2)$, im Widerspruch zur Injektivität von φ.

Bei Kreislinien, Ränder von Dreiecken *usw.* ist eine kanonische Richtung vorgegeben, der mathematisch positive Umlaufsinn oder Gegenuhrzeigersinn, wobei die positive reelle Achse durch Drehung um 90° auf die positive imaginäre Achse abgebildet wird. In solchen Fällen reicht es daher, anstelle des Integrationswegs γ nur den Kreis oder das Dreieck anzugeben. Wir schreiben dann für eine Kreisscheibe D oder ein Dreieck $\triangle$ einfach

$$\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz \qquad \text{oder} \qquad \int\limits_{\partial\triangle} f(z)\,dz\,,$$

womit das Integral über irgendeinen im Gegenuhrzeigersinn orientierten Integrationsweg mit dem angegebenen Träger gemeint sein soll – nach dem Lemma ist der Wert des Integrals unabhängig davon, welcher Integrationsweg gewählt wird.

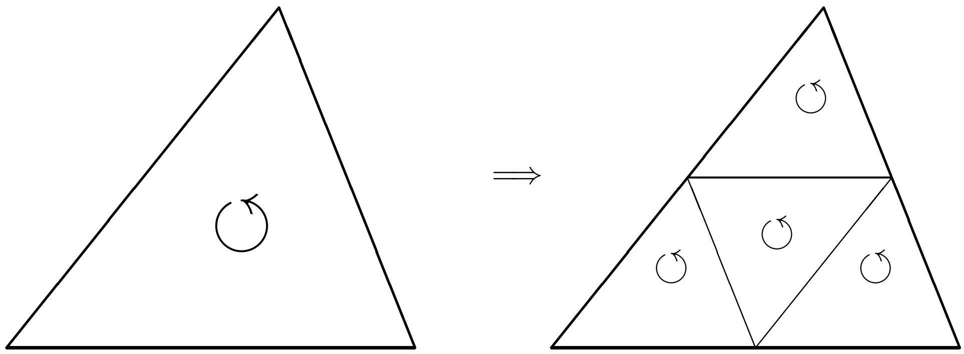
Damit können wir zumindest für konvexe Gebiete den wichtigsten Satz der Vorlesung beweisen, den CAUCHYschen Integralsatz:

SATZ 2.6: *Die Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ sei holomorph auf dem konvexen Gebiet G. Dann gilt für jede geschlossene Kurve γ mit $|\gamma| \subset G$*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0\,.$$

Beweis: Nach Lemma 2.3 genügt es zu zeigen, daß f auf G eine Stammfunktion hat, und nach Lemma 2.4 genügt es dazu wiederum, den Satz für den Spezialfall zu beweisen, daß γ die Randkurve eines ganz in G liegenden abgeschlossenen Dreiecks ist. (Dieser Spezialfall wird als Satz von GOURSAT bezeichnet.) Sei also $\triangle$ ein Dreieck in G, dessen Kanten o.B.d.A. im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen werden. Indem wir die drei Seitenmittelpunkte von $\triangle$ paarweise miteinander verbinden, können wir $\triangle$ in vier kleinere Dreiecke $\triangle_1, \dots, \triangle_4$ zerlegen, und wenn wir diese wieder alle im Gegenuhrzeigersinn orientieren, gehört jede Verbindungslinie zweier Seitenmittelpunkte zu genau zwei $\triangle_j$ und wird bei jedem der beiden in entgegengesetzter

Richtung durchlaufen, während die Seiten, die auf dem Rand von $\triangle$ liegen, nur einmal und in der alten Orientierung durchlaufen werden:



Somit ist

$$\int\limits_{\partial\triangle} f(z)\,dz = \int\limits_{\partial\triangle_1} f(z)\,dz + \cdots + \int\limits_{\partial\triangle_4} f(z)\,dz$$

und damit

$$\left|\int\limits_{\partial\triangle} f(z)\,dz\right| \leq 4 \left|\int\limits_{\partial\triangle^{(1)}} f(z)\,dz\right| ,$$

wobei $\triangle^{(1)}$ ein Dreieck $\triangle_j$ ist, für das gilt

$$\left|\int\limits_{\partial\triangle_k} f(z)\,dz\right| \leq \left|\int\limits_{\partial\triangle_j} f(z)\,dz\right| \quad \text{für } j = 1, \ldots, 4\,.$$

Dieses Dreieck $\triangle^{(1)}$ können wir wieder über die Seitenmittelpunkte in vier Dreiecke zerlegen und davon eines auswählen, für das der Betrag des Integrals maximal ist; auf diese Weise erhalten wir eine Folge $\triangle^{(1)}, \triangle^{(2)}, \ldots$ von Dreiecken, die sich auf einen Punkt $z_0 \in G$ zusammenziehen und für die gilt

$$\left|\int\limits_{\partial\triangle} f(z)\,dz\right| \leq 4^n \left|\int\limits_{\partial\triangle^{(n)}} f(z)\,dz\right| .$$

Der Satz folgt, sobald wir wissen, daß die rechte Seite dieser Gleichung beliebig klein werden kann. Sei dazu s die Summe der Kantenlängen von $\triangle$; da wir Dreiecke immer nach Seitenmittelpunkten unterteilen, hat dann $\triangle^{(n)}$ den Umfang $s_n = 2^{-n}s$. Außerdem ist f holomorph in z_0, es gibt also eine stetige (sogar holomorphe) Funktion g, so daß in einer gewissen Umgebung von z_0 gilt

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + h\big(f'(z_0) + g(h)\big)$$

mit $|g(h)| = o(|h|)$. Daher ist

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{\partial\triangle} f(z)\,dz\right| &\le 4^n \left|\int\limits_{\partial\triangle^{(n)}} f(z)\,dz\right| \\ &\le 4^n \left|\int\limits_{\partial\triangle^{(n)}} \big(f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)\big)\,dz + \int\limits_{\partial\triangle^{(n)}} (z - z_0)g(z - z_0)\,dz\right| .\end{aligned}$$

Der erste Summand in der Klammer verschwindet nach Lemma 2.3, da eine lineare Funktion natürlich eine (quadratische) Stammfunktion hat, also ist

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{\partial\triangle} f(z)\,dz\right| &\le 4^n\, s_n \cdot \max_{z\in\triangle^{(n)}} |(z - z_0)g(z - z_0)| \\ &\le 4^n\, s_n^2 \cdot \max_{z\in\triangle^{(n)}} |g(z - z_0)| = s^2 \cdot \max_{z\in\triangle^{(n)}} |g(z - z_0)| ,\end{aligned}$$

denn der Abstand zweier Punkte z, z_0 aus einem Dreieck kann nicht größer sein als dessen Umfang.

Für $n \to \infty$ zieht sich das Dreieck $\triangle^{(n)}$ auf den Punkt z_0 zusammen, und wegen $|g(z)| = o(|z - z_0|)$ geht damit $\max_{z\in\triangle^{(n)}} |g(z - z_0)|$ gegen Null. Dies beendet des Beweis des Satzes.

■

Die gerade bewiesene Form des CAUCHYschen Integralsatzes ist bei weitem noch nicht die allgemeinstmögliche; insbesondere ist die Voraussetzung der Konvexität von G noch zu speziell. Ganz ohne Voraussetzungen an G gilt der Satz allerdings nicht, wie das folgende Beispiel zeigt:

Die Funktion $f(z) = 1/(z-z_0)$ ist holomorph im Gebiet $G = \mathbb{C} \smallsetminus \{z_0\}$. Wir betrachten den Integrationsweg $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = z_0 + re^{2\pi it}$, geometrisch betrachtet also den Kreis um z_0 mit Radius r, der für jedes $r > 0$ ganz in G liegt. Dann ist

$$\int\limits_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = \int\limits_0^1 \frac{2\pi i\, re^{2\pi it}}{z_0 + re^{2\pi it} - z_0} dt = 2\pi i \int\limits_0^1 dt = 2\pi i \neq 0\,.$$

Dieses Rechenergebnis ist wichtig genug, um für später festgehalten zu werden als

LEMMA 2.7: *Ist D eine Kreisscheibe um $z_0 \in \mathbb{C}$, so gilt unabhängig vom Radius*

$$\int_{\partial D} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i\,.$$

■

Wenn wir auf dieses Integral das Beweisverfahren des CAUCHYschen Integralsatzes anwenden, ziehen sich die $\triangle^{(n)}$ auf den Punkt z_0 zusammen, wo $1/(z-z_0)$ unendlich groß wird. Somit reicht schon die Nichtdefiniertheit in diesem einen Punkt, um den Satz falsch werden zu lassen. Eine für den Rest des Kapitels und auch für die gesamte Funktionentheorie interessante Kuriosität ist aber, daß der Satz richtig bleibt, wenn wir die Funktion f wenigstens *stetig fortsetzen* können in den einen Punkt (oder auch die endlich vielen Punkte), von denen wir nicht wissen, ob sie dort holomorph ist:

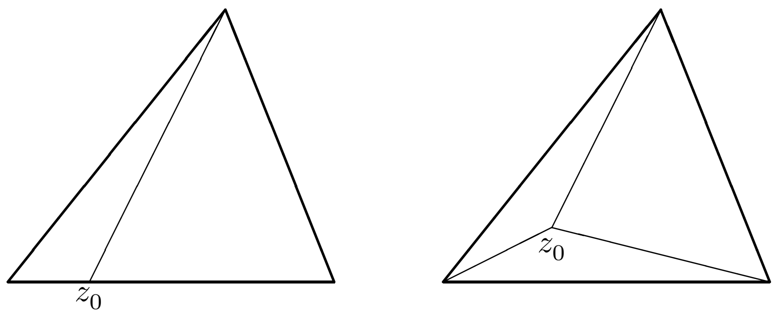
SATZ 2.8: *Die Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ sei stetig auf dem konvexen Gebiet G und holomorph auf $G \smallsetminus \{z_0\}$ für einen festen Punkt $z_0 \in G$.*

Dann gilt für jede geschlossene Kurve γ mit $|\gamma| \subset G$

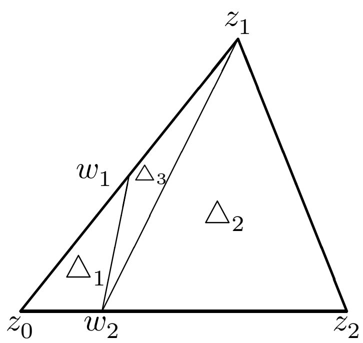
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0\,.$$

Beweis: Wie beim CAUCHYschen Integralsatz genügt es, den Rand eines Dreiecks zu betrachten. Falls z_0 außerhalb des abgeschlossenen Dreiecks $\triangle$ liegt, gibt es auch ein konvexes Gebiet, das zwar $\triangle$, nicht aber z_0 enthält; der gewöhnliche CAUCHYsche Integralsatz zeigt also die Behauptung.

Falls z_0 in $\triangle$ liegt, können wir o.B.d.A. annehmen, daß z_0 eine Ecke von $\triangle$ ist, denn andernfalls kann $\triangle$ so in zwei oder drei Dreiecke zerlegt werden, daß das Integral über den Rand von $\triangle$ gleich der Summe der Integrale über die Ränder dieser Dreiecke ist und jedes dieser Dreiecke z_0 höchstens als Eckpunkt enthält:



Für ein Dreieck mit Ecken z_0, z_1 und z_2 wählen wir einen Punkt w_1 auf der Seite z_0z_1 und einen Punkt w_2 auf der Seite z_0z_2.



Dies zerlegt $\triangle$ in drei Dreiecke:

— $\triangle_1$ mit Ecken z_0, w_1 und w_2,

— $\triangle_2$ mit Ecken w_1, w_2 und z_1,

— $\triangle_3$ mit Ecken w_1, z_1 und z_2. Nach dem CAUCHYschen Integralsatz verschwinden die Integrale über die Ränder von $\triangle_2$ und $\triangle_3$, und das über den Rand von $\triangle_1$ kann leicht abgeschätzt werden: Als stetige Funktion hat $|f|$ ein Maximum M auf der kompakten Menge $\triangle_1$, also ist

$$\left|\int\limits_{\partial\triangle_1} f(z)\,dz\right| \le M\big(|w_1 - z_0| + |w_2 - z_0| + |w_2 - w_1|\big)\,.$$

Da w_1 und w_2 beliebig nahe bei z_0 gewählt werden können, läßt sich die rechte Seite beliebig klein machen, das Integral verschwindet also. ■

Als erste Anwendung betrachten wir eine in einem Gebiet G holomorphe Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$, eine offene Kreisscheibe D, deren Abschluß in G liegt, und für einen festen Punkt $z_0 \in D$ die Funktion

$$g\colon D \to \mathbb{C}\,; \qquad z \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & \text{für } z \ne z_0 \\ f'(z_0) & \text{für } z = z_0. \end{cases}$$

Da f holomorph ist, ist g auch im Punkt z_0 stetig, allerdings ist nicht klar, ob g dort auch holomorph ist. Trotzdem können wir den gerade bewiesenen Satz anwenden auf ein konvexes Teilgebiet G' von G, das $\overline{D}$ enthält, etwa eine offene Kreisscheibe mit geringfügig größerem Radius als D, und können folgern, daß $\int_{\partial D} g(z)\,dz$ verschwindet. Also ist

$$\int_{\partial D} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,dz = \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz - f(z_0)\int_{\partial D} \frac{dz}{z - z_0} = 0$$

und damit

$$\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = f(z_0)\int_{\partial D} \frac{dz}{z - z_0}\,.$$

Falls z_0 der Mittelpunkt von D ist, wissen wir nach Lemma 2.7, daß das rechte Integral gleich $\frac{1}{2\pi i}$ ist. Um einzusehen, daß dies auch im allgemeinen Fall gilt, betrachten wir z_0 als eine neue Variable w und das Integral als Funktion

$$\psi(w) = \int_{\partial D} \frac{dz}{z-w}\,dz$$

von w. Für $z \in |\gamma|$ ist der Integrand $1/(z-w)$ eine in D holomorphe Funktion von w mit Ableitung $(z-w)^{-2}$; nach den üblichen Regeln über die Vertauschung von Grenzprozessen folgt genau wie im Reellen, daß man die Differentiation nach w und die Integration über z miteinander vertauschen kann; $\psi(w)$ ist also eine holomorphe Funktion von w mit Ableitung

$$\psi'(w) = \int_{\partial D} \frac{dz}{(z-w)^2}\,dz\,.$$

Diesen Integranden betrachten wir nun wieder als Funktion von z. Dann ist er die Ableitung von $-1/(z-w)$, hat also eine Stammfunktion, und damit verschwindet das Integral nach Lemma 2.3. Also ist $\psi(w)$ eine konstante Funktion, die im Mittelpunkt von D und damit überall den Wert $\frac{1}{2\pi i}$ annimmt. Dies beweist die

CAUCHYSCHE INTEGRALFORMEL: $f\colon G \to \mathbb{C}$ *sei eine im Gebiet* G *holomorphe Funktion, und* D *sei eine offene Kreisscheibe, deren Abschluß in* G *liegt. Dann ist für jeden Punkt* $z_0 \in D$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \frac{f(z)\,dz}{z-z_0}\,.$$

■

Diese Formel ist unter zwei Aspekten sehr interessant: Einerseits erlaubt sie uns, den Wert der Funktion f im Punkt z_0 zu berechnen, wenn wir nur die Werte von f auf einer Kreislinie kennen, für die z_0 im Kreisinnern liegt.

Auch für den Aufbau der Funktionentheorie ist die CAUCHYsche Integralformel von großer Bedeutung: Fassen wir $z_0 = w$ als neue Variable auf und betrachten wir z als fest, so steht im Integranden die rationale Funktion $g(w) = f(z)/(z-w)$. Das ist eine sehr einfache Funktion. Sie ist in $\mathbb{C}\setminus\{z\}$ holomorph und dort sogar beliebig oft differenzierbar mit

$$g'(w) = \frac{f(z)}{(z-w)^2} \quad \text{und} \quad \frac{d^n g}{dw^n}(w) = \frac{n!\,f(z)}{(z-w)^{n+1}}\,.$$

Wie im gerade beendeten Beweis können wir Integration über z und Differentiation nach w miteinander vertauschen und erhalten

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(z)\,dz}{(z-w)^2} \quad \text{und} \quad f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(z)\,dz}{(z-w)^{n+1}}\,.$$

Da rechts eine in w holomorphe Funktion über z integriert wird, folgt daß *auch f' und alle höheren Ableitungen in G holomorph sind.* Somit gilt

SATZ 2.9: *Die Funktion $f\colon G\to\mathbb{C}$ sei im Gebiet G holomorph. Dann ist f in G beliebig oft differenzierbar, und alle Ableitungen sind holomorph. Für einen Punkt $z_0\in G$ und eine ganz in G liegende abgeschlossene Kreisscheibe D, in deren Innern z_0 liegt, ist*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\,.$$

■

Auf die Beträge angewandt gibt dies die CAUCHYschen Ungleichungen:

KOROLLAR: *Ist D eine Kreisscheibe mit Radius r um w_0, so gilt für jedes positive $\delta\le r$ und jedes z_0 in der Kreisscheibe mit Radius $r-\delta$*

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \le \frac{n!\,r}{\delta^{n+1}}\max_{z\in\partial D}|f(z)|\,.$$

Insbesondere gilt für ein z_0 mit $|z_0-w_0|\le r/2$

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \le \frac{2^{n+1}n!}{r^{n+1}}\max_{z\in\partial D}|f(z)|\,.$$

Der *Beweis* ist klar: ∂D hat die Länge $2\pi r$, und für $z \in \partial D$ ist $|z - z_0|$ mindestens δ.
■

Ebenfalls aus Satz 2.9 folgt, daß Satz 2.8 gar keine echte Verallgemeinerung des CAUCHYschen Integralsatzes darstellt; es gilt also

LEMMA 2.10: *Die Funktion $f: G \to \mathbb{C}$ sei in G stetig und es gebe endlich viele Punkte $z_1, \ldots, z_r$, so daß f auf $G \smallsetminus \{z_1, \ldots, z_r\}$ holomorph ist. Dann ist f auf ganz G holomorph.*

Beweis: Jeder der Punkte z_j hat in G eine Kreisscheibe D_j als Umgebung, die keinen weiteren Punkt z_k enthält. Somit gilt in D_j nach Satz 2.8 die CAUCHYsche Integralformel, nach Lemma 2.4 hat f dort also eine (nach Definition holomorphe) Stammfunktion, als deren Ableitung f nach Satz 2.9 ebenfalls in ganz D_j holomorph ist.
■

Tatsächlich lassen sich die Voraussetzungen sogar noch weiter abschwächen:

RIEMANNSCHER HEBBARKEITSSATZ: *G sei ein Gebiet, und es gebe endlich viele Punkte $z_1, \ldots, z_r$, so daß f auf $G \smallsetminus \{z_1, \ldots, z_r\}$ holomorph ist. Falls f in der Umgebung jedes Punktes z_j beschränkt ist, läßt sich f fortsetzen zu einer auf ganz G holomorphen Funktion.*

Beweis: D_j sei wie oben eine Kreisscheibe um z_j, die keinen weiteren Punkt z_k enthalte; dann ist die Funktion

$$F_j: D_j \to \mathbb{C}; \quad z \mapsto \begin{cases} (z - z_j) f(z) & \text{für } z \neq z_j \\ 0 & \text{für } z = z_j \end{cases}$$

holomorph in $D_j \smallsetminus \{z_j\}$ und, wegen der Beschränktheit von f in der Umgebung der z_j, stetig auf ganz D_j. Also ist F_j nach dem gerade bewiesenen Lemma holomorph auf ganz D_j. Damit gibt es eine holomorphe Funktion g_j auf D_j, so daß

$$F_j(z) = F_j(z_j) + (z - z_j) g_j(z) = (z - z_j) g_j(z)$$

ist. Für $z \neq z_j$ ist $g_j(z) = f(z)$, also setzt g_j die Funktion f nach z_j holomorph fort.

■

Eine holomorphe Funktion ist nicht nur beliebig oft differenzierbar, sie läßt sich sogar als Potenzreihe darstellen: Ausgangspunkt ist die Funktion $g(w) = f(z)/(z-w)$, die sich für festes $z, w_0 \in D$ als geometrische Reihe in $(w - w_0)$ darstellen läßt: Die allgemeine Formel

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

gilt auch im Komplexen, denn die Reihe auf der rechten Seite konvergiert für $|x| < 1$ absolut und gleichmäßig, so daß das Produkt $(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ auch im Komplexen so zusammengefaßt werden kann, daß sich außer $x^0 = 1$ alle Glieder wegheben. Um den wesentlichen Teil $1/(z-w)$ des Integranden der CAUCHYschen Integralformel auf diese Form zu bringen, wählen wir einen Punkt w_0 im Innern von D; dann ist

$$\frac{1}{z-w} = \frac{\dfrac{1}{z-w_0}}{\dfrac{z-w}{z-w_0}} = \frac{\dfrac{1}{z-w_0}}{1-\left(1-\dfrac{z-w}{z-w_0}\right)} = \frac{\dfrac{1}{z-w_0}}{1-\dfrac{w-w_0}{z-w_0}}$$
$$= \frac{1}{z-w_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w-w_0}{z-w_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(w-w_0)^n}{(z-w_0)^{n+1}}\,.$$

Diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig, falls

$$\left|\frac{w-w_0}{z-w_0}\right| < 1 \qquad \text{oder} \qquad |w-w_0| < |z-w_0|$$

ist, wenn also w im Innern einer Kreisscheibe um w_0 mit Radius $|z-w_0|$ liegt. Alsdann lassen sich Integration und Summation vertauschen, und wir erhalten

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(z)\,dz}{z-w} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} f(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-w_0)^n}{(z-w_0)^{n+1}}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (w-w_0)^n$$

mit

$$a_n = \frac{f^{(n)}(w_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(z)\,dz}{(z-w_0)^{n+1}}$$

für alle w, die in einer ganz in D enthaltenen Kreisscheibe um w_0 liegen. Damit folgt

SATZ 2.11: *Die Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ sei im Gebiet G holomorph. Dann gilt für jeden Punkt $z_0 \in G$ und jedes z aus einer offenen Kreisscheibe D um z_0, deren Abschluß ganz in G liegt*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \textit{mit} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(w_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \,.$$

Diese Darstellung von f als Potenzreihe in $(z-z_0)$ ist eindeutig.

Beweis: Ist D eine solche Scheibe, so ist nach der CAUCHYschen Integralformel

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(z)\,dz}{z-w} \,,$$

wir können also die obige Rechnung für D ausführen und erhalten die behauptete Potenzreihendarstellung. Die Eindeutigkeit folgt wie im Reellen daraus, daß für eine Potenzreihe $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ die n-te Ableitung an der Stelle z_0 gleich $n!\,a_n$ ist.

■

Da Potenzreihenansätze bei vielen Anwendungen der Mathematik die einzige Möglichkeit sind, ein Problem zu lösen, hat die gerade bewiesene Eigenschaft holomorpher Funktionen einen eigenen Namen:

DEFINITION: *Eine Funktion $f: G \to \mathbb{C}$ in einem Gebiet G ist dort analytisch, wenn es für jedes $z_0 \in G$ eine Umgebung $U \subset G$ gibt, so daß f in U durch eine Potenzreihe in $(z - z_0)$ dargestellt werden kann.*

Damit sind holomorphe Funktionen also analytisch.

An dieser Stelle lohnt sich eine erste Zusammenfassung. Zwar kennen wir die Eigenschaften holomorpher Funktionen noch nicht so gut, wie wir sie für einige Anwendungen brauchen, denn der CAUCHYsche Integralsatz ist in seiner Fassung für konvexe Gebiete noch viel zu speziell, und auch die CAUCHYsche Integralformel gilt natürlich nicht nur für Kreisscheiben, sondern auch noch für sehr viel allgemeinere geschlossene Kurven, aber ein Grundstock ist gelegt und viele wesentliche Eigenschaften sind inzwischen aufgetaucht. Der folgende Satz zeigt, daß die meisten von ihnen äquivalent sind:

SATZ 2.12: *Die Funktion $f: G \to \mathbb{C}$ sei im Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ erklärt; mit $z = x + iy$ sei $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ die Zerlegung von f in Real- und Imaginärteil. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*
a) f ist holomorph in G.
b) u und v sind differenzierbare reelle Funktionen, die die CAUCHY-RIEMANN*schen Differentialgleichungen erfüllen.*
c) f ist stetig, und für jedes Dreieck $\triangle$, dessen Abschluß in G liegt, verschwindet $\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz$.
d) Auf jedem konvexen Teilgebiet $G' \subset G$ hat f eine Stammfunktion.
e) f ist stetigi, und $\int_\gamma f(z)\,dz$ verschwindet für jeden geschlossenen Integrationsweg $\gamma: [a, b] \to G'$ in einem konvexen Teilgebiet $G' \subset G$.
f) f ist beliebig oft differenzierbar auf G.
g) f ist analytisch in G.

Beweis: a) und *b)* sind äquivalent nach Lemma 2.1; *a)* $\Rightarrow$ *c)* ist der uns bereits bekannte Spezialfall des CAUCHYschen Integralsatzes, und aus *c)* folgt *d)* nach Lemma 2.4. *d)* $\Rightarrow$ *e)* ist Lemma 2.3, und *e)* $\Rightarrow$ *c)* ist klar, da ein abgeschlossenes Dreieck in G immer ein offenes Dreieck in G als Umgebung hat, und damit ein konvexes Gebiet. *e)* $\Rightarrow$ *f)* ist im wesentlichen Satz 2.9: Zwar wurde dort f als holomorph vorausgesetzt, aber der Beweis beruhte ausschließlich auf dem CAUCHYschen

Integralsatz und damit der Eigenschaft *e)*. Aus *f)* folgt natürlich *a)*, und daraus wiederum *g)* nach Satz 2.11. Da eine Potenzreihe differenzierbar ist, folgt daraus schließlich wieder *a)*, womit der Satz bewiesen wäre.

■

Im Rest dieses Paragraphen soll es um weitere Eigenschaften holomorpher Funktionen gehen, die zwar nicht äquivalent zur Holomorphie sind, die aber trotzdem von großem Interesse sind. Beispielsweise folgt aus den CAUCHYschen Ungleichungen sofort der

SATZ VON LIOUVILLE: *Die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph, und es gebe eine Konstante M; so daß $|f(z)| \le M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann ist f konstant.*

JOSEPH LIOUVILLE (1809–1882) war Sohn eines Kapitäns aus NAPOLEONS Armee. Er kam 1825 an die Ecole Polytechnique, wo er unter anderem Vorlesungen von AMPÈRE hörte. 1831 wurde er Assistent bei AMPÈREs Nachfolger MATHIEU; später lehrte er unter anderem am Collège de France und an der Ecole Polytechnique. Nach der 1848er Revolution war er (als gemäßigter Republikaner) kurz Mitglied der Nationalversammlung. Seine über 400 Arbeiten befassen sich unter anderem mit der Zahlentheorie, mit Differentialgleichungen, Differentialoperatoren, Differentialgeometrie, statistischer Mechanik und Astronomie.

Beweis: Nach Satz 2.11 kann f durch eine Potenzreihe um den Nullpunkt dargestellt werden, etwa durch $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Nach den Cauchyschen Ungleichungen mit $\delta = r$ ist für jedes $r > 0$

$$|a_n| = \frac{\left|f^{(n)}(0)\right|}{n!} \le \frac{M}{r^n} \,,$$

und diese Schranke wird für große r und $n > 0$ beliebig klein. Also verschwinden alle a_n mit $n > 0$, und $f(z) = a_0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

■

Die bekannteste Anwendung davon ist der

FUNDAMENTALSATZ DER ALGEBRA: *Jedes Polynom vom Grad ungleich Null mit komplexen Koeffizienten hat mindestens eine komplexe Nullstelle.*

Beweis: f sei ein nichtkonstantes Polynom mit komplexen Koeffizienten, das keine komplexe Nullstelle habe. Dann ist die Funktion $g(z) = 1/f(z)$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Sie ist auch beschränkt, denn da $|f(z)| \to \infty$ für $z \to \infty$ gibt es ein $R \in \mathbb{R}$, so daß $|f(z)| > 1$ und damit $|g(z)| < 1$ für $|z| > R$, und auf dem (kompakten) Kreis um Null mit Radius R ist g ohnehin beschränkt. Also ist g und damit f konstant, im Widerspruch zur Voraussetzung. ∎

Bei den restlichen Anwendungen wird es vor allem um Folgerungen aus der Analytizität gehen. Die Analytizität einer Funktion ist eine sehr starke Einschränkung, im Reellen etwa zeigt das Beispiel der Funktion $x \mapsto e^{-1/x^2}$ mit Wert Null für $x = 0$, daß sich selbst eine beliebig oft differenzierbare Funktion nicht notwendigerweise durch eine Potenzreihe darstellen läßt: Da im Nullpunkt alle Ableitungen verschwinden, ist die TAYLOR-Reihe konstant gleich Null.

Aus der Tatsache, daß hier im Komplexen *jede* holomorphe Funktion analytisch ist, lassen sich weitgehende Folgerungen ziehen, zum Beispiel der *Identitätssatz:*

SATZ 2.13: *Die Funktionen $f, g\colon G \to \mathbb{C}$ seien im Gebiet G holomorph. Falls es eine Teilmenge $M \subset G$ gibt, die in G einen Häufungspunkt hat, so daß $f(z) = g(z)$ für alle $z \in M$, stimmen f und g auf ganz G überein.*

Beweis: Natürlich genügt es, den Fall $g = 0$ zu betrachten. z_∞ sei ein Häufungspunkt von M und $(z_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge aus $M \setminus \{z_\infty\}$, die gegen z_∞ konvergiert. o.B.d.A. können wir dabei annehmen, daß alle z_j in einer offenen Kreisscheibe D um z_∞ liegen, deren Abschluß ganz in G liegt. Wäre f nicht identisch Null auf D, so gäbe es in der Potenzreihenentwicklung von f um z_∞ einen von Null verschiedenen

Koeffizienten; der erste solche Koeffizient sei a_n, d.h.

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_\infty)^k \quad \text{mit} \quad a_n \neq 0\,.$$

Dann ist $\dfrac{f(z)}{(z - z_\infty)^n} = a_n + (z - z_\infty) \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (z - z_\infty)^{k-n-1}\,.$
Für die Punkte z_j ist nach Voraussetzung $f(z_j) = g(z_j) = 0$, also ist auch $f(z_j)/(z_j - z_\infty)^n = 0$ für alle j, und wegen der Stetigkeit von f verschwindet auch

$$\lim_{j\to\infty} \frac{f(z_j)}{(z_j - z_\infty)^n} = \lim_{j\to\infty} \left(a_n + (z_j - z_\infty) \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (z_j - z_\infty)^{k-n-1} \right) = a_n,$$

im Widerspruch zur Annahme. Also verschwindet f auf ganz D.

Sei G' die Teilmenge von G, auf der f und seine sämtlichen Ableitungen verschwinden. Wie wir gerade gesehen haben, liegt D in G', das somit nicht leer ist. Außerdem ist G' offen, denn jeder Punkt hat eine Umgebung, in der f durch die identisch verschwindende Potenzreihe dargestellt wird.

Für einen Punkt z aus dem Komplement von G' in G gibt es mindestens ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $f^{(k)}(z) \neq 0$. Wegen der Stetigkeit von $f^{(k)}$ ist dann auch $f^{(k)}(w) \neq 0$ für alle w aus einer Umgebung von z, d.h. auch $G \setminus G'$ ist offen. Da G als Gebiet zusammenhängend ist, kann G nicht als disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener Teilmengen dargestellt werden; da G' nicht leer ist, muß also $G \setminus G'$ leer sein, d.h. $G' = G$ und f verschwindet identisch auf ganz G.

■

Vor der nächsten Anwendung der Analytizität benötigen wir einen Hilfssatz:

LEMMA 2.14: *$f\colon G \to \mathbb{C}$ sei holomorph im Gebiet G, und D sei eine abgeschlossene Kreisscheibe mit Mittelpunkt z_0, die ganz in G liege. Falls $|f(z_0)|$ kleiner ist als das Minimum der $|f(z)|$ für $z \in \partial D$, hat f in D eine Nullstelle.*

Beweis: Hätte f keine Nullstelle in D, so wäre auch $g = 1/f$ zumindest in einem D enthaltenden Teilgebiet G' von G holomorph, und nach Voraussetzung wäre $|g(z_0)|$ größer als das Maximum der $|g(z)|$ für $z \in \partial D$. Dies widerspricht den CAUCHYschen Ungleichungen, die für $\delta = r$ und $n = 0$ genau das Gegenteil aussagen. ■

SATZ VON DER GEBIETSTREUE: *$f\colon G \to \mathbb{C}$ sei holomorph im Gebiet G und nicht konstant. Dann ist auch $f(G)$ wieder ein Gebiet.*

Beweis: Wegen der Stetigkeit von f ist mit G auch $f(G)$ zusammenhängend, es geht also nur um die Offenheit. Dazu sei $w_0 = f(z_0)$ ein Punkt aus $f(G)$, und D sei eine offene Kreisscheibe um z_0, deren Abschluß ganz in G liegt und außer z_0 keinen weiteren Punkt z enthält mit $f(z) = w_0$. (Eine solche Kreisscheibe existiert, denn sonst gäbe es eine gegen z_0 konvergierende Folge von Punkten, auf denen f den Wert w_0 annimmt; f wäre also konstant gleich w_0 nach dem Identitätssatz.) Daher ist $|f(z) - w_0|$ auf ∂D positiv und nimmt dort ein positives Minimum M an.

Ein fester Punkt $w \in \mathbb{C}$ liegt genau dann in $f(G)$, wenn die Funktion $f(z) - w$ in G eine Nullstelle hat, und das ist nach dem gerade bewiesenen Hilfssatz jedenfalls dann der Fall, wenn gilt

$$|f(z_0) - w| \le |f(z) - w| \quad \text{für alle } z \in \partial D\,.$$

Links steht $|w - w_0|$, und die rechte Seite kann abgeschätzt werden durch

$$|f(z) - w| \ge |f(z) - w_0| - |w - w_0| \ge M - |w - w_0|\,;$$

es genügt also auf jeden Fall, daß $|w - w_0| < M/3$ ist. Also enthält $f(G)$ die Kreisscheibe um w_0 mit Radius $M/3$, ist also offen. ■

Im Reellen gilt kein entsprechender Satz: Beispielsweise ist die Funktion $f(x) = 1/(x^2+1)$ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und sogar analytisch, aber das offene Intervall $(-1, 1)$ wird auf das halboffene Intervall $(\frac{1}{2}, 1]$ abgebildet.

Die wichtigsten Anwendungen dieses Satzes sind die Prinzipien vom Maximum und von Minimum:

PRINZIP VOM MAXIMUM: *Für eine nichtkonstante holomorphe Funktion* $f: G \to \mathbb{C}$ *kann* $|f|$ *in keinem inneren Punkt des Gebiets* G *ein lokales Maximum annehmen. Falls* G *beschränkt ist und* f *auf* $\overline{G}$ *stetig fortgesetzt werden kann, nimmt* $|f|$ *sein Maximum auf dem Rand von* G *an und* $|f(z)| \le \max_{\zeta\in\partial G} |f(\zeta)|$ *für alle* $z \in G$ *.*

Beweis: Für $z_0 \in G$ hat $w_0 = f(z_0)$ in $f(G)$ nach dem Satz von der Gebietstreue eine offene Kreisscheibe als Umgebung, und diese enthält natürlich auch Punkte, deren Betrag größer ist als der von z_0. Also kann $|w_0|$ kein lokales Maximum sein.

■

Ganz entsprechend gilt auch das

PRINZIP VOM MINIMUM: *Für eine nichtkonstante holomorphe Funktion* $f: G \to \mathbb{C}$ *kann* $|f|$ *in keinem inneren Punkt des Gebiets* G *ein von Null verschiedenes lokales Minimum annehmen. Falls* G *beschränkt ist und* f *auf* $\overline{G}$ *stetig fortgesetzt werden kann, hat* f *entweder Nullstellen in* G*, oder* $|f|$ *nimmt sein Minimum auf dem Rand von* G *an und* $|f(z)| \ge \min_{\zeta\in\partial G} |f(\zeta)|$ *für alle* $z \in G$ *.*

■

Im Reellen sind alle drei gerade bewiesenen Sätze selbst für analytische Funktionen falsch: Der Sinus, beispielsweise, bildet das zusammenhängende offene Intervall $(10, 10)$ ab auf das abgeschlossene Intervall $[0, 1]$ und nimmt seine (betragsmäßigen) Maxima und Minima in inneren Punkten von $(10, 10)$ an.

Gerade das Prinzip vom Maximum wird im weiteren Verlauf der Vorlesung noch häufiger auftauchen; im Augenblick soll uns als erste Anwendung das Schwarzsche Lemma genügen, wonach eine holomorphe Funktion, die den Einheitskreis in sich selbst abbildet und den Nullpunkt festläßt, den Betrag nicht vergrößern kann:

Lemma 2.15: *$f\colon D \to D$ sei eine holomorphe Funktion, die den offenen Einheitskreis D in sich selbst abbildet und auch den Nullpunkt festläßt. Dann ist $|f(z)| \le |z|$ für alle $z \in D$, insbesondere also auch $|f'(0)| \le 1$.*
Ist $|f(z)| = |z|$ für ein $z \ne 0$ oder $|f'(0)| = 1$, so ist $f(z) = e^{i\varphi} z$ für einen geeigneten Winkel φ; die Abbildung ist also eine Drehung.

Beweis: f läßt sich in D als Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ schreiben; wegen $f(0) = 0$ verschwindet a_0, und da die gegebene Reihe für alle $z \in D$ konvergiert, konvergiert auch die Reihe $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n$, d.h. $f(z) = z \cdot g(z)$ mit einer holomorphen Funktion $g\colon D \to \mathbb{C}$. Da $f(D)$ in D liegt, ist
$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \le \frac{1}{|z|}$$
für alle $z \ne 0$ aus D. Nach dem Prinzip vom Maximum, angewandt auf einen Kreis mit Radius $r < 1$ um den Nullpunkt, folgt, daß sogar $|g(z)| \le \frac{1}{r}$ für jedes $r < 1$ mit $|z| \le r$. Für $r \to 1$ folgt, daß $|g(z)| \le 1$ ist, also $|f(z)| \le |z|$ und $|f'(0)| \le 1$.

Ist $|f(z)| = |z|$ für ein $z \ne 0$ oder $|f'(0)| = 1$, so gibt es einen Punkt von D, in dem $|g(z)| = 1$ ist. Da überall $|g(z)| \le 1$ ist, wird also in diesem inneren Punkt das Maximum angenommen, und das ist nur für eine konstante Funktion möglich. Also ist $g(z)$ eine Konstante vom Betrag eins, d.h. $g(z) = e^{i\varphi}$ für einen geeigneten Winkel φ. ■

Der deutsche Mathematiker Karl Hermann Amandus Schwarz (1843–1921) beschäftigte sich hauptsächlich mit konformen Abbildungen und mit sogenannten Minimalflächen, d.h. Flächen mit vorgegebenen Eigenschaften, deren Flächeninhalt minimal ist. Im Rahmen einer entsprechenden Arbeit für die Weierstrass-Festschrift von 1885 (im Falle eines durch Doppelintegrale definierten Skalarprodukts) bewies er die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, die Cauchy bereits 1821 für endlichdimensionale Vektorräume bewiesen hatte. Schwarz lehrte nacheinander in Halle, Zürich, Göttingen und Berlin.

Kapitel 3: Meromorphe Funktionen

Bereits mehrfach sind wir Funktionen wie $f(z) = 1/z$ begegnet, die in einem oder mehreren Punkten nicht definiert sind, da sie dort die Form „$1/0$“ haben, und wir haben auch, etwa beim Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra, für eine holomorphe Funktion g den Grenzwert $\lim_{z\to\infty} g(z)$ betrachtet. Intuitiv würde man gerne $f(0) = \infty$ und $g(\infty)$ schreiben: In diesem Paragraphen soll es darum gehen, unter welchen Bedingungen das möglich ist, und welche Sätze auch dann noch gelten, wenn der spezielle „Wert“ ∞ erlaubt wird.

DEFINITION: *a) Die* RIEMANN*sche Zahlenkugel* $\widehat{\mathbb{C}}$ *ist die Menge* $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *mit einem speziellen Symbol* ∞.
b) Eine Teilmenge $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ *heißt Umgebung von* $z_0 \in \mathbb{C} \subset \widehat{\mathbb{C}}$, *wenn* $U \setminus \{\infty\}$ *eine Umgebung von* z_0 *ist;* U *heißt Umgebung von* ∞, *wenn* $\infty \in U$, *und wenn es ein* $R > 0$ *gibt, so daß* $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$ *in* U *liegt.* U *heißt offen, wenn es Umgebung jedes seiner Punkte ist.*
c) Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $z_n \in \widehat{\mathbb{C}}$ *konvergiert gegen* $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, *wenn es für jede Umgebung* U *von* z *ein* $N \in \mathbb{N}$ *gibt, so daß* $z_n \in U$ *für alle* $n \leq N$.
d) Für eine offene Teilmenge $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ *heißt* $f\colon U \to \widehat{\mathbb{C}}$ *stetig, wenn es für jedes* $z \in U$ *und jede Umgebung* W *von* $w = f(z)$ *eine Umgebung* V *von* z *gibt, so daß* $f(V) \subset W$.

Die Umgebungen des Punktes ∞ sind genau die Mengen, die außer ∞ auch noch das Äußere einer Kreisscheibe enthalten. Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert daher genau dann gegen ∞, wenn es zu jeder reellen Zahl $R > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $|z_n| > R$ für alle $n \geq N$. Ist beispielsweise $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge (mit $z_n \neq 0$ für alle n), so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $|z_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Für ein vorgegebenes $R > 0$ können wir dies anwenden für $\varepsilon = 1/R$ und erhalten, daß $|z_n| < 1/R$ und damit $|1/z_n| > R$ für alle $n \geq N$. Somit konvergiert die Folge $(1/z_n)$ gegen ∞. Da die Folge der Zahlen $1/n$ eine Nullfolge ist, konvergiert insbesondere die Folge der natürlichen Zahlen gegen ∞.

Unmittelbar aus der Definition der Stetigkeit folgt, daß die Abbildung

$$f\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}; \quad z \mapsto \begin{cases} 1/z & \text{für } z \neq 0, \infty \\ \infty & \text{für } z = 0 \\ 0 & \text{für } z = \infty \end{cases}$$

auch in den beiden Punkten 0 und ∞ stetig ist; es liegt daher nahe, kurz zu schreiben

$$\frac{1}{0} = \infty \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{\infty} = 0\,.$$

Genauso kann man auch die Funktionen $z \mapsto z \pm a$ und $z \mapsto a \pm z$ für jedes feste $a \in \mathbb{C}$ stetig fortsetzen durch die Vorschrift $\infty \mapsto \infty$, man kann also kurz schreiben

$$a \pm \infty = \infty \pm a = \infty \qquad \text{für alle } a \in \mathbb{C}\,.$$

Auch für $z \mapsto az$ ist diese stetige Fortsetzung möglich, allerdings müßte man für $a = 0$ durch $\infty \mapsto 0$ fortsetzen, was nicht im Einklang mit anderen Grenzwerten für „$0 \cdot \infty$“ steht; deshalb begnügen wir uns mit der Rechenregel

$$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty \qquad \text{für alle } a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\,.$$

Problemlos ist das Produkt

$$\infty \cdot \infty = \infty\,,$$

aber für die Ausdrücke

$$\infty \pm \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \text{und} \quad \frac{0}{0}$$

lassen sich keine sinnvollen Rechenregeln erklären, so daß diese Ausdrücke verboten bleiben.

$\widehat{\mathbb{C}}$ kann man sich auch geometrisch veranschaulichen: Legt man eine Kugel vom Radius eins so auf die komplexe Zahlenebene $\mathbb{C}$, daß ihr Südpol auf dem Punkt 0 liegt und die Polarachse senkrecht auf $\mathbb{C}$ steht (für Formelfanatiker heißt das, daß man die Sphäre

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \bigm| x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\}$$

betrachtet, wobei die (x,y)-Ebene mit $\mathbb{C}$ identifiziert wird), so kann man jedem Punkt P der Kugeloberfläche mit Ausnahme des Nordpols einen eindeutig bestimmten Punkt von $\mathbb{C}$ zuordnen, nämlich den Schnittpunkt der Geraden durch P und den Nordpol mit $\mathbb{C}$. Umgekehrt schneidet auch jede Gerade durch einen Punkt von $\mathbb{C}$ und den Nordpol der Kugel die Kugeloberfläche in genau einem weiteren Punkt, so daß man eine bijektive Abbildung der Kugeloberfläche minus des Nordpols auf $\mathbb{C}$ bekommt. Für eine Folge von Punkten der Kugeloberfläche, die gegen den Nordpol konvergieren, konvergieren die Bildpunkte in $\mathbb{C}$ gegen ∞ und umgekehrt; daher kann $\widehat{\mathbb{C}}$ als topologischer Raum mit der Kugeloberfläche identifiziert werden und heißt deshalb auch RIEMANNsche Zahlenkugel oder – besser – RIEMANNsche Sphäre. Insbesondere folgt, daß $\widehat{\mathbb{C}}$ als topologischer Raum kompakt ist. Da dieses Resultat für das folgende noch wichtig sein wird und ich die Topologie der Sphäre nicht als bekannt voraussetzen möchte, sei es hier noch einmal direkt bewiesen:

LEMMA 3.1: *$\widehat{\mathbb{C}}$ ist kompakt.*

Beweis: $\widehat{\mathbb{C}} = \bigcup_{i\in I} U_i$ sei eine offene Überdeckung von $\widehat{\mathbb{C}}$; wir müssen zeigen, daß sie eine endliche Teilüberdeckung hat. Dazu sei U_{i_0} eine Überdeckungsmenge, die den Punkt ∞ enthält; da U_{i_0} offen ist, enthält U_{i_0} dann nach Definition auch das Äußere einer abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{D}$. Diese ist abgeschlossen und beschränkt, wird also nach dem Satz von Heine-Borel durch endlich viele Mengen $U_{i_1}, \dots U_{i_r}$ überdeckt. Somit ist $\widehat{\mathbb{C}} = U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_r}$ kompakt. ■

Holomorphie im Punkt ∞ kann nicht ganz so wie im letzten Paragraphen definiert werden, denn für $z = \infty$ ist auch $z + h = \infty$ für jedes $h \in \mathbb{C}$, und auch die Existenz des Grenzwerts

$$\lim_{w \to \infty} \frac{f(w) - f(\infty)}{w - \infty}$$

nützt nichts, da der Nenner für $w \neq \infty$ immer gleich ∞ ist, so daß der Grenzwert existiert und Null ist, sobald der Zähler nur endlich bleibt; die Funktion muß also nicht einmal stetig sein. Damit ist eine Definition dieser Art unbrauchbar für den Punkt $z = \infty$, und wir müßten einen erheblich größeren Aufwand treiben, um eine Definition zu finden, die in gleicher Weise für jedes $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ gültig ist. Ein solcher Aufwand lohnt sich nicht: Da nach dem RIEMANNschen Hebbarkeitssatz jede stetige Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ mit $U \subset \mathbb{C}$, die für irgendein $z_0 \in U$ in $U \smallsetminus \{z_0\}$ holomorph ist, tatsächlich in ganz U holomorph ist, definieren wir in Analogie

DEFINITION: *Eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$ auf einer offenen Teilmenge $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ heißt holomorph, wenn sie stetig und auf $U \smallsetminus \{\infty\}$ holomorph ist.*

Als Beispiel betrachten wir die Funktion

$$f\colon \widehat{\mathbb{C}} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C}; \quad z \mapsto 1/z\,.$$

Für $z \neq \infty$ wissen wir bereits, daß die Funktion dort holomorph ist mit Ableitung $f'(z) = -1/z^2$, und für $z \to \infty$ ist

$$\lim_{z \to \infty} 1/z = 0\,;$$

die Funktion ist also stetig. Damit ist f außer im Nullpunkt überall holomorph.

Es ist kein Zufall, daß wir einen Punkt – hier den Nullpunkt – ausnehmen mußten, denn

LEMMA 3.2: *Jede holomorphe Funktion $f\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ ist konstant.*

Beweis: Mit $\widehat{\mathbb{C}}$ ist auch $f(\widehat{\mathbb{C}}) \subset \mathbb{C}$ kompakt, also ist f beschränkt; demnach ist die Einschränkung von f auf $\mathbb{C}$ nach dem Satz von LIOUVILLE konstant, und wegen der Stetigkeit von f im Punkt ∞ ist f damit konstant auch ganz $\widehat{\mathbb{C}}$.

■

Damit sind holomorphe Funktionen auf $\widehat{\mathbb{C}}$ uninteressant; es liegt in der Tat viel näher, Funktionen $\widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ zu betrachten, wie etwa die Funktion $z \mapsto 1/z$, und für diese so etwas wie Holomorphie zu definieren. Da der CAUCHYsche Integralsatz nach Lemma 2.7 falsch werden kann, wenn wir Funktionen betrachten, die im Innern eines Gebiets den Wert ∞ annehmen können, bezeichnen wir solche Funktionen nicht als holomorph, sondern führen einen neuen Namen ein: Sie sollen *meromorphe Funktionen* heißen. Trotzdem sollen sie so weit wie möglich die gleichen Eigenschaften haben wie holomorphe Funktionen: Beispielsweise darf es nach dem Identitätssatz für nichtkonstante holomorphe Funktionen f für keinen Wert $a \in \mathbb{C}$ eine Menge M mit Häufungspunkt geben, so daß $f(z) = a$ für alle $z \in M$; diese Eigenschaft soll per Analogie natürlich auch für $a = \infty$ gelten. Die konstante Funktion, die überall ∞ ist, interessiert uns nicht besonders; wir definieren daher

DEFINITION: *Die Abbildung $f: U \to \widehat{\mathbb{C}}$ auf der offenen Teilmenge U von $\widehat{\mathbb{C}}$ heißt meromorph, wenn sie stetig ist und wenn es eine Teilmenge $M \subset U$ gibt, die keinen Häufungspunkt in U hat, so daß f auf $U \setminus M$ holomorph ist.*

Eine so definierte meromorphe Funktion kann, sofern sie nicht konstant ist, in der Tat auch keinen anderen Wert $a \in \mathbb{C}$ auf einer Menge mit Häufungspunkt in U annehmen, denn nach dem Identitätssatz Satz 2.13 wäre f sonst konstant gleich a auf $U \setminus M$ und damit als stetige Funktion auf ganz U.

Man beachte, daß sich nicht jede holomorphe Funktion, die in einer Umgebung eines Punktes mit Ausnahme dieses Punktes definiert ist, als meromorphe Funktion in diesen Punkt hinein fortsetzen läßt. Ein einfaches Beispiel dafür ist die Exponentialfunktion: Diese ist im

Punkt ∞ nicht definiert, und es gibt auch keine stetige Fortsetzung in diesen Punkt, denn $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ kann auch für beliebig großen Betrag von $x + iy$ beliebig große und beliebig kleine Werte annehmen, je nachdem ob x oder y groß wird. Tatsächlich kann man sich leicht überlegen, daß die Exponentialfunktion in jeder beliebigen Umgebung von ∞ jeden beliebigen Wert außer 0 und ∞ annimmt, und damit kann natürlich kein Grenzwert existieren.

DEFINITION: *$U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ sei eine offene Menge, $z_0 \in U$, und die Funktion $f: U \setminus \{z_0\} \to \widehat{\mathbb{C}}$ sei meromorph. Falls es keine stetige Fortsetzung von f auf ganz U gibt, heißt z_0 eine wesentliche Singularität von f.*

Demnach hat also die Exponentialfunktion im Punkt ∞ eine wesentliche Singularität. Es ist kein Zufall, daß sie in jeder Umgebung dieses Punktes abgesehen von den beiden Ausnahmen 0 und ∞ jeden Wert annimmt; nach einem Satz von PICARD kann eine meromorphe Funktionen in einer Umgebung einer wesentlichen Singularität außer ∞ höchstens noch eine komplexe Zahl auslassen. Dieser Satz ist allerdings mit unseren bisherigen Methoden nicht zu beweisen.

Wir wollen uns stattdessen überlegen, wie eine meromorphe Funktion f in der Umgebung eines Punktes z_0 mit $f(z_0) = \infty$ aussieht. Da die Menge M aller Punkte z, in denen $f(z) = \infty$ ist, keinen Häufungspunkt in U hat, gibt es eine Umgebung V von z_0, die außer z_0 keinen weiteren Punkt aus M enthält; wegen der Stetigkeit von f kann V so gewählt werden, daß f auf V keine Nullstelle hat. Dann ist mit f auch

$$g: V \to \mathbb{C}; \quad z \mapsto 1/f(z)$$

eine stetige Funktion, die auf $V \setminus \{z_0\}$ und damit nach Lemma 2.10 auf ganz V holomorph ist mit $g(z_0) = 0$. Als holomorphe Funktion ist g analytisch, hat also eine Potenzreihenentwicklung

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

um z_0, wobei zumindest $a_0 = 0$ ist. Sei a_k der erste nichtverschwindende Koeffizient dieser Potenzreihe. Dann ist auch

$$\frac{g(z)}{(z-z_0)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}(z-z_0)^n$$

holomorph in einer Umgebung von z_0 und nimmt dort nirgends den Wert Null an, d.h. auch der Kehrwert dieser Funktion ist holomorph. Für $z \neq z_0$ ist aber

$$\frac{(z-z_0)^k}{g(z)} = (z-z_0)^k f(z)\,,$$

also läßt sich die Funktion $(z-z_0)^k f(z)$ zu einer auch in z_0 holomorphen Funktion $V \to \mathbb{C}$ fortsetzen und lokal um z_0 in eine Potenzreihe

$$(z-z_0)^k f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$$

mit

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)(\zeta-z_0)^k\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n-k+1}}$$

entwickeln. Für $z \neq z_0$ ist dann

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \quad \text{mit} \quad c_n = b_{n+k} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,,$$

und da die Summe für $z = z_0$ bereits als ersten Summanden den Term ∞ hat, stellt diese Reihe auch für $z = z_0$ die Funktion f dar. Sie heißt LAURENTreihe von f.

SATZ 3.3: *Die Funktion $f\colon G \to \widehat{\mathbb{C}}$ sei im Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ meromorph. Dann gibt es für jeden Punkt $z_0 \in G$ ein $k \in \mathbb{Z}$, so daß für jedes z aus* *einer offenen Kreisscheibe D um z_0, deren Abschluß ganz in G liegt und keinen Punkt z_1 enthält mit $f(z_1)=\infty$, gilt*

$$f(z)=\sum_{n=-k}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \textit{mit} \quad a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\in\mathbb{C}\,.$$

Diese Darstellung von f als Potenzreihe in $(z-z_0)$ ist eindeutig.

Beweis: Dies folgt in der Tat sofort aus obiger Rechnung zusammen mit Satz 2.11, denn $(z-z_0)^k f(z)$ ist in einer Umgebung von $\overline{D}$ holomorph.

■

Für den Punkt $z_0=\infty$ wäre ein solcher Satz natürlich sinnlos, da $(z-z_0)^n$ für jedes $z\in\mathbb{C}$ und jedes $n>0$ gleich ∞ ist. Deshalb betrachten wir für $z_0=\infty$ im allgemeinen die Funktion $f(1/z)$ in der Umgebung von Null, und dafür kann Satz 3.3 problemlos angewandt werden. Ein erstes Beispiel dafür liefert die folgende

DEFINITION: *Die meromorphe Funktion $f\colon U\to\widehat{\mathbb{C}}$ habe um den Punkt $z_0\in\mathbb{C}$ die Potenzreihenentwicklung*

$$f(z)=\sum_{n=k}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \textit{mit} \quad a_k\neq 0\,.$$

Dann bezeichnen wir k als die Ordnung von f im Punkt z_0, in Zeichen $k=\operatorname{ord}_{z_0} f$. Liegt $z=\infty$ in U, so betrachten wir in einer geeigneten Umgebung der Null die Funktion $g(z)=f(1/z)$ und definieren $\operatorname{ord}_\infty f=\operatorname{ord}_0 g$.
Ist $k>0$, so sagen wir, f habe in z_0 eine k-fache Nullstelle; ist $k=-\ell<0$, so nennen wir z_0 eine ℓ-fache Polstelle oder einen Pol der Ordnung ℓ. Für die konstante Funktion $f\equiv 0$ setzen wir formal $\operatorname{ord}_{z_0} f=\infty$ für alle $z_0\in\widehat{\mathbb{C}}$.

Alternativ kann man auch sagen, die Funktion f habe in $z_0\in\mathbb{C}$ die Ordnung k, wenn es eine in z_0 holomorphe Funktion g gibt, so daß in einer Umgebung von z_0 gilt $f(z)=(z-z_0)^k(g(z)$ und $g(z_0)\neq 0$.

Im Falle $z_0 = \infty$ muß es eine ein ∞ holomorphe Funktion g mit $g(\infty) \neq 0$, so daß $f(z) = z^{-k} g(z)$ in einer Umgebung von ∞.

Beispielsweise hat also die Funktion

$$f(z) = \frac{(z-1)(z-3)^2(z-5)^7}{z^3(z-2)^8(z-4)^{20}}$$

für $z = 1$ eine einfache, für $z = 3$ eine doppelte und für $z = 5$ eine siebenfache Nullstelle; $z = 0$ ist eine dreifache Polstelle, $z = 2$ eine achtfache, und $z = 4$ ist ein Pol der Ordnung zwanzig. Für alle anderen Werte $z = z_0 \in \mathbb{C}$ ist $\operatorname{ord}_{z_0} f = 0$. Für $z = \infty$ betrachten wir die Funktion

$$\begin{aligned} g(z) = f(1/z) &= \frac{(1/z-1)(1/z-3)^2(1/z-5)^7}{1/z^3(1/z-2)^8(1/z-4)^{20}} \\ &= z^{21} \cdot \frac{(1-z)(1-3z)^2(1-5z)^7}{(1-2z)^8(1-4z)^{20}} \,, \end{aligned}$$

die für $z = 0$ eine 21-fache Nullstelle hat. Daher ist ∞ eine 21-fache Nullstelle von f.

Allgemein ist offenbar $\operatorname{ord}_\infty f = n \neq \infty$ genau dann, wenn sich f als $f = z^{-n} g$ schreiben läßt mit einer in ∞ nicht verschwindenden und in einer Umgebung von ∞ holomorphen Funktion g. Weitere leicht verifizierbare Eigenschaften der Ordnung sind

$$\operatorname{ord}_{z_0} fg = \operatorname{ord}_{z_0} f + \operatorname{ord}_{z_0} g \tag{1}$$

$$\operatorname{ord}_{z_0} \frac{f}{g} = \operatorname{ord}_{z_0} f - \operatorname{ord}_{z_0} g \tag{2}$$

$$\operatorname{ord}_{z_0}(f \pm g) \geq \min\bigl(\operatorname{ord}_{z_0} f,\ \operatorname{ord}_{z_0} g\bigr)\,. \tag{3}$$

Genauer können wir sogar sagen, daß in (3) das Gleichheitszeichen gilt, sobald die Ordnungen $\operatorname{ord}_{z_0} f$ und $\operatorname{ord}_{z_0} g$ voneinander verschieden sind; (3) mit diesem Zusatz wird gelegentlich als *ultrametrische Dreiecksungleichung* bezeichnet.

DEFINITION: *a) Ist* $f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ *in einer Umgebung von* $z_0 \in \mathbb{C}$*, so nennen wir*

$$H(z) = \sum_{n=-k}^{-1} a_n (z-z_0)^n$$

den Hauptteil *von* f *im Punkt* z_0.
b) Ist $f(1/z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n z^n$ *in einer Umgebung der Null, so nennen wir*

$$H(z) = \sum_{n=1}^{k} a_{-n} z^n$$

den Hauptteil *von* f *im Punkt* ∞.

Der Name *Hauptteil* ist zumindest für meromorphe Funktionen, die auf ganz $\widehat{\mathbb{C}}$ definiert sind, berechtigt, denn für diese gilt

LEMMA 3.4: *Eine meromorphe Funktion* $f\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ *ist durch ihre Hauptteile bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.*

Beweis: Falls $g\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ die gleichen Hauptteile wie f hat, ist der Hauptteil von $f-g$ in jedem Punkt gleich Null, $f-g$ ist also auf ganz $\widehat{\mathbb{C}}$ holomorph und damit nach Lemma 3.2 eine Konstante. ∎

Allgemeiner folgt

SATZ 3.5: *Jede auf ganz* $\widehat{\mathbb{C}}$ *meromorphe Funktion ist rational, d.h. ein Quotient zweier Polynome.*

Beweis: $f\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ sei meromorph; dann gibt es nach Definition höchstens endlich viele Pole, denn sonst hätten die Pole in der kompakten Menge $\widehat{\mathbb{C}}$ einen Häufungspunkt, im Widerspruch zur Definition einer auf $\widehat{\mathbb{C}}$ meromorphen Funktion. Ist ∞ einer dieser Pole, etwa mit $\operatorname{ord}_\infty f = -n$, so läßt sich $f = z^n g$ schreiben mit einer ebenfalls auf ganz $\widehat{\mathbb{C}}$ meromorphen Funktion g, die in ∞ holomorph ist, und es genügt, die Rationalität von g zu zeigen. Daher seien die endlich vielen Pole $z_1, \ldots, z_r$ von f o.B.d.A. alle von ∞ verschieden. Dann können wir die Hauptteile H_j von f in den Punkten z_j betrachten; diese sind rational, also auf ganz $\widehat{\mathbb{C}}$ meromorph, und

$$F = f - \sum_{j=1}^{r} H_j$$

ist sogar auf ganz $\widehat{\mathbb{C}}$ holomorph, da jedes H_j auf $\widehat{\mathbb{C}} \smallsetminus \{z_j\}$ holomorph ist und $f - H_j$ in z_j holomorph ist. Daher ist F nach Lemma 3.2 konstant, d..h. f ist abgesehen von einer additiven Konstanten gerade die Summe der H_j und damit eine rationale Funktion.

■

Da umgekehrt natürlich auch jede rationale Funktion meromorph auf ganz $\widehat{\mathbb{C}}$ ist, sind also die auf ganz $\widehat{\mathbb{C}}$ meromorphen Funktionen genau die rationalen Funktionen. Auf echten Teilmengen von $\widehat{\mathbb{C}}$ gibt es natürlich noch viele weitere meromorphe Funktionen, insbesondere zum Beispiel die vielen holomorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$, die wir aus Polynomen und Exponentialfunktionen konstruieren können. Der Tangens ist ein Beispiel einer auf ganz $\mathbb{C}$ meromorphen, aber nicht holomorphen Funktion, und im weiteren Verlauf der Vorlesung werden wir noch zahlreiche weitere solche Beispiele kennenlernen.

Der CAUCHYsche Integralsatz gilt natürlich nicht für meromorphe Funktionen; wie wir in Lemma 2.7 gesehen haben, ist er schon für $f(z) = 1/z$ falsch. Tatsächlich ist das aber im wesentlichen schon die einzige Ausnahme, denn es gilt:

LEMMA 3.6: *Die Funktion $f\colon G \to \widehat{\mathbb{C}}$ sei meromorph im Gebiet G, und D sei eine offene Kreisscheibe, deren Abschluß ganz in G liege und mit der möglichen Ausnahme eines Punktes $z_0 \in D$ keinen Pol von f enthalte. Weiter sei*

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

die LAURENT*reihe von* f *um* z_0. *Dann ist*

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 2\pi i a_{-1}\,.$$

Beweis: $H(z)$ sei der Hauptteil von $f(z)$ in z_0; dann gibt es eine in einer Umgebung von $\overline{D}$ holomorphe Funktion g, so daß $f(z) = H(z) + g(z)$. Nach dem CAUCHYschen Integralsatz verschwindet das Integral über $g(z)$ entlang eines Kreises, d.h.

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = \int_{\partial D} H(z)\,dz = \sum_{n=1}^{k} a_{-n} \int_{\partial D} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = 2\pi i a_{-1}$$

nach Lemma 2.7, denn für $n \neq 1$ hat $1/(z-z_0)^n$ eine in einer Umgebung von ∂D holomorphe Stammfunktion, so daß das Integral nach Lemma 2.3 verschwindet. ■

DEFINITION: *Der Koeffizient* a_{-1} *heißt das* Residuum *von* f *im Punkt* z_0, *in Zeichen:* $a_{-1} = \operatorname{Res}_{z_0} f$.

Das gerade bewiesene Lemma läßt sich verallgemeinern zum

RESIDUENSATZ: *Die Funktion* $f\colon G \to \widehat{\mathbb{C}}$ *sei meromorph im Gebiet* G, *und* D *sei eine offene Kreisscheibe, deren Abschluß ganz in* G *liege und auf deren Rand kein Pol von* f *liege. Dann ist*

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z\in D} \operatorname{Res}_z f\,.$$

Beweis: Gäbe es in D unendlich viele Polstellen von f, so müßten die Pole in der abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{D} \subset G$ einen Häufungspunkt haben, was nach Definition einer meromorphen Funktion ausgeschlossen ist. Daher gibt es höchstens endlich viele Polstellen $z_1, \dots, z_r$. Die

Hauptteile in diesen Polstellen seien $H_1(z), \ldots, H_r(z)$. Diese sind auf ganz $\widehat{\mathbb{C}}$ meromorph; daher ist

$$g(z) = f(z) - H_1(z) - \cdots - H_r(z)$$

in einer Umgebung von $\overline{D}$ holomorph. Somit ist nach dem gerade bewiesenen Lemma

$$\int\limits_{\partial D} f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{r} \int\limits_{\partial D} H_r(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{r} \operatorname{Res}_{z_j} f = 2\pi i \sum_{z \in D} \operatorname{Res}_z f\,,$$

wie behauptet.

■

Der Residuensatz hat zahlreiche Anwendungen in der Funktionentheorie. Als erstes Beispiel dafür, wie sich andere Konzepte durch Residuen ausdrücken lassen, betrachten wir zu einer meromorphen Funktion $f\colon G \to \widehat{\mathbb{C}}$ die ebenfalls auf G meromorphe Funktion f'/f. Für $z_0 \in G$ und $k = \operatorname{ord}_{z_0} f$ ist dann

$$f(z) = \sum_{n \ge k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_k (z - z_0)^k g(z)$$

mit einer in z_0 holomorphen Funktion g mit $g(z_0) = 1$. Entsprechend ist

$$f'(z) = \sum_{n \ge k}^{\infty} n a_n (z - z_0)^n = k a_k (z - z_0)^{k-1} h(z)$$

mit einer in z_0 holomorphen Funktion h mit $h(z_0) = 1$, und

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k a_k (z - z_0)^{k-1} h(z)}{a_k (z - z_0)^k g(z)} = \frac{k}{z - z_0} \cdot \frac{h(z)}{g(z)}$$

mit $h(z_0)/g(z_0) = 1$. Also ist

$$\operatorname{Res}_{z_0} \frac{f'}{f} = k = \operatorname{ord}_{z_0} f\,.$$

Damit folgt aus dem Residuensatz

Satz 3.7: *Die Funktion $f\colon G \to \widehat{\mathbb{C}}$ sei meromorph im Gebiet G und D sei eine offene Kreisscheibe, deren Abschluß ganz in G liege und deren Rand keine Nullstellen oder Pole von f enthalte. Dann ist*

$$\int\limits_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \sum_{z\in D} \operatorname{ord}_z f\,.$$

■

Allgemeiner können wir anstelle der Nullstellen auch die a-Stellen einer Funktion zählen:

Definition: *Die meromorphe Funktion $f\colon G \to \widehat{\mathbb{C}}$ nimmt den Wert $a \in \mathbb{C}$ im Punkt $z_0 \in G$ mit Vielfachheit $k \geq 1$ an, wenn die Ordnung $\operatorname{ord}_{z_0}(f-a) = k$ ist. Sie nimmt den Punkt ∞ mit Vielfachheit k an, wenn z_0 ein k-facher Pol ist. Sie nimmt $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ in der Menge $M \subset \widehat{\mathbb{C}}$ mit Vielfachheit n an, falls es in M endlich viele Punkte z_i gibt mit $f(z_i) = a$, und die Summe der Vielfachheiten, mit denen a dort angenommen wird, gleich n ist.*

Satz 3.8: *$f\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ sei auf ganz $\widehat{\mathbb{C}}$ meromorph und nicht konstant. Dann nimmt f jeden Wert $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ mit gleicher Vielfachheit an.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß jeder Wert $a \in \mathbb{C}$ mit der gleichen Vielfachheit angenommen wird wie ∞. Da f und $f-a$ den Wert ∞ mit gleicher Vielfachheit annehmen, reicht es sogar, daß jedes f die Werte 0 und ∞ mit gleicher Vielfachheit annimmt, daß also

$$\sum_{z\in\widehat{\mathbb{C}}} \operatorname{ord}_z f = 0$$

ist. Dabei können wir o.B.d.A. annehmen, daß ∞ weder Pol noch Nullstelle von f ist, denn ansonsten können wir $f = z^k g$ schreiben mit einer Funktion g, die diese Voraussetzung erfüllt, und da der Faktor z^k sowohl die Null als auch ∞ mit Vielfachheit k annimmt, genügt es, die Behauptung für g zu beweisen.

Dazu sei $D_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le r\}$ der Kreis mit Radius r um den Nullpunkt. Dann gibt es eine reelle Zahl R, so daß D_r für jedes $r > R$ die sämtlichen Nullstellen und Polstellen von f enthält, denn Polstellen von f dürfen nach Definition einer meromorphen Funktion keinen Häufungspunkt in $\widehat{\mathbb{C}}$ haben, und die Nullstellen dürfen es nicht, da f sonst konstant wäre. Wegen der Kompaktheit von $\widehat{\mathbb{C}}$ gibt es also nur endlich viele Nullstellen und Polstellen, und wir können R gleich dem Betrag der größten setzen.

Damit ist für jedes $r > R$

$$\sum_{z \in \widehat{\mathbb{C}}} \operatorname{ord}_z f = \int_{\partial D_r} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz\,,$$

und wir müssen zeigen, daß dieses Integral verschwindet. Nach der Substitutionsregel ist für $h(z) = f'(z)/f(z)$

$$\int_{\partial D_r} h(z)\, dz = \int_{\partial D_{1/r}} h\left(\frac{1}{z}\right) d\frac{1}{z} = -\int_{\partial D_{1/r}} \frac{h(1/z)}{z^2}\, dz\,.$$

Da h nach Voraussetzung in ∞ holomorph ist, läßt sich

$$h\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

in einer gewissen Umgebung der Null, die für hinreichend großes r auch $D_{1/r}$ enthält, in eine Potenzreihe entwickeln, und in

$$\frac{h(1/z)}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+2}}$$

hat jeder der Summanden eine Stammfunktion, also verschwindet das Integral über $\partial D_{1/r}$ für jeden Term und damit für die gesamte Funktion.

■

DEFINITION: *Die gemeinsame Vielfachheit n, mit der $f\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ jedes $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ annimmt, heißt* Grad *von f.*

Als erstes Beispiel betrachten wir ein Polynom, das im algebraischen Sinne den Grad n habe, d.h. $f(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ mit $a_n \neq 0$. Da

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a_n}{z^n} + \cdots + a_0 = \frac{a_n + a_{n-1}z + \cdots + a_0 z^n}{z^n}$$

im Nullpunkt eine n-fache Polstelle hat, hat f in ∞ einen n-fachen Pol und ist sonst überall endlich, der gerade definierte Grad ist also gleich dem üblichen Grad n.

Als zweites Beispiel betrachten wir den Quotienten $f(z) = P(z)/Q(z)$ zweier teilerfremder Polynome P und Q, also eine rationale Funktion. Dann ist

$$\operatorname{ord}_\infty f = \operatorname{ord}_\infty P - \operatorname{ord}_\infty Q = -\deg P + \deg Q = \deg Q - \deg P\,.$$

Falls $\deg Q \geq \deg P$, hat f also in ∞ eine $(\deg Q - \deg P)$-fache Nullstelle, außerdem nimmt P, und damit f, wie wir beim ersten Beispiel gesehen haben den Wert Null auf $\mathbb{C}$ mit Vielfachheit $\deg P$ an, insgesamt nimmt f auf $\widehat{\mathbb{C}}$ die Null also mit Vielfachheit $\deg Q$ an.

Für $\deg Q < \deg P$, hat f in ∞ eine $(\deg P - \deg Q)$-fache Nullstelle, außerdem nimmt Q die Null in $\mathbb{C}$ mit Vielfachheit $\deg Q$ an, d.h. ∞ wird von f auf $\mathbb{C}$ mit Vielfachheit $\deg Q$ angenommen und damit auf $\widehat{\mathbb{C}}$ mit Vielfachheit $\deg P$. Somit gilt:

LEMMA 3.9: *Der Grad einer rationalen Funktion $f(z) = P(z)/Q(z)$ mit teilerfremden Polynomen P und Q ist*

$$\deg f = \max(\deg P, \deg Q)\,.$$

■

Die Nützlichkeit des Residuensatzes steht und fällt damit, daß wir die auf der rechten Seite auftretenden Residuen gut berechnen können.

Das Residuum einer meromorphen Funktion f an einer Stelle z_0 ist der Koeffizient von $(z-z_0)^{-1}$ in der LAURENT-Entwicklung von f und als solcher zumindest im Prinzip berechenbar. Für die Funktion

$$f(z)=\frac{\sin z}{z^4}=\frac{1}{z^4}\left(z-\frac{z^3}{6}+\frac{z^5}{120}-\cdots\right)=z^{-3}-\frac{z^{-1}}{6}+\frac{z}{120}-\cdots$$

etwa ist $\operatorname{Res}_0 f=\frac{1}{6}$. Für die rationalen Funktionen, die wir als Hauptanwendung im Auge haben, ist diese Vorgehensweise aber im allgemeinen recht aufwendig. Hier ist oft eine teilweise Partialbruchzerlegung günstiger, aber im Falle eines Pols erster Ordnung geht alles noch viel einfacher:

In diesem Fall hat die LAURENT-Entwicklung die Form

$$f(z)=\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots\ ,$$

also ist

$$\operatorname{Res}_{z_0} f=a_{-1}=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)\,.$$

Dies funktioniert natürlich nur für Pole erster Ordnung, denn für Pole höherer Ordnung divergiert der rechtsstehende Grenzwert gegen unendlich.

Grundsätzlich können wir das Verfahren allerdings auch für Pole höherer Ordnung einsetzen, jedoch müssen wir dann zunächst aller anderen Koeffizienten a_{-k} mit negativem k berechnen.

Der erste dieser Koeffizienten ist im Falle eines Pols n-ter Ordnung a_{-n}; das gleiche Argument wie oben führt sofort auf die Gleichung

$$a_{-n}=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^n f(z)\,.$$

Die Funktion $f(z)-a_{-n}/(z-z_0)^n$ ist eine meromorphe Funktion, die bei z_0 höchstens einen Pol der Ordnung $n-1$ hat und deren LAURENT-Koeffizienten abgesehen von a_{-n} mit denen von f übereinstimmen.

Somit ist

$$\begin{aligned} a_{-(n-1)} &= \lim_{z\to z_0} (z-z_0)^{n-1}\left(f(z)-\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}\right) \\ &= \lim_{z\to z_0}\left((z-z_0)^{n-1}f(z)-\frac{a_{-n}}{z-z_0}\right) . \end{aligned}$$

Die Funktion $f(z) - a_{-n}/(z-z_0)^n - a_{-(n-1)}/(z-z_0)^2$ hat in z_0 höchstens einen Pol $(n-2)$-ter Ordnung, also können wir mit einer entsprechenden Formel $a_{-(n-2)}$ berechnen, und so weiter, bis wir bei a_{-1} angekommen sind.

Betrachten wir als erstes Beispiel für die Berechnung von Integralen über den Residuensatz eine Kreisscheibe D mit Radius zwei um den Nullpunkt und das Integral

$$\int\limits_{\partial D} \frac{z^5+1}{z^4-1}\,dz .$$

Der Nenner hat die vier Nullstellen ± 1 und $\pm i$, die allesamt im Innern von D liegen; $z=-1$ ist allerdings auch Nullstelle des Zählers. Wegen

$$z^5+1 = (z+1)(z^4-z^3+z^2-z+1) \quad \text{und} \quad z^4-1 = (z+1)(z^3-z^2+z-1)$$

ist

$$\begin{aligned} \lim_{z\to -1}\frac{z^5+1}{z^4-1} &= \lim_{z\to -1}\frac{z^4-z^3+z^2-z+1}{z^3-z^2+z-1} \\ &= \frac{(-1)^4-(-1)^3+(-1)^2-(-1)+1}{(-1)^3-(-1)^2+(-1)-1} = -\frac{5}{4} ; \end{aligned}$$

Pole gibt es also nur für $+1$ und $\pm i$. Diese Pole haben allesamt Ordnung eins, da es sich um einfache Nullstellen des Nenners handelt. Also ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_1 f &= \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{(z^5+1)(z-1)}{(z+1)(z-1)(z^2+1)} \\ &= \lim_{z\to 1}\frac{z^5+1}{(z+1)(z^2+1)} = \frac{2}{2\cdot 2} = \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

Genauso bestimmt man

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_i f &= \lim_{z\to i} \frac{z^5+1}{(z^2-1)(z+i)} \\ &= \frac{i^5+1}{(i^2-1)(i+i)} = \frac{i+1}{-4i} = \frac{-1+i}{4}\end{aligned}$$

und

$$\operatorname{Res}_{-i} f = \frac{(-i)^5+1}{\big((-i)^2-1\big)(-i-i)} = \frac{1-i}{(-2)\cdot(-2i)} = \frac{-1-i}{4}\,.$$

Die Summe der drei Residuen ist Null, also verschwindet nach dem Residuensatz auch das Integral.

Man beachte, daß wir dieses Ergebnis nicht ohne weiteres über eine Stammfunktion bekommen hätten, denn die Stammfunktion

$$\frac{z^2}{2} + \frac{1}{2}\log(z-1) - \frac{1}{4}\log(z^2+1) - \frac{1}{2}\arctan z$$

ist gleich an mehreren Stellen des Integrationswegs unstetig: An der Stelle $z=-2$ überquert das Argument von $\log(z-1)$ die negative reelle Achse, und für $z=\pm 2i$ das von $\log(z^2+1)$. Auch läßt sich der Arkustangens nicht als holomorphe Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ definieren und sorgt so für zusätzliche Probleme.

Auf den ersten Blick erstaunlich, gerade für Anwendungen in der Elektrotechnik aber wichtig ist die Tatsache, daß sich auch eine ganze Reihe von bestimmten Integrale im Reellen am einfachsten über den Residuensatz berechnen lassen. Dabei handelt es sich in erster Linie um uneigentliche Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\,,$$

deren Integrand f sich zu einer auf $\mathbb{C}$ meromorphen Funktion $f(z)$ fortsetzen läßt. Die für uns wichtigsten Beispiele sind rationale Funktionen, also Funktionen, die sich als Quotient zweier Polynome schreiben lassen, und bei denen ist diese Bedingung trivialerweise erfüllt.

Komplex betrachtet ist der Integrationsweg hier die gesamte reelle Achse, und die ist natürlich alles andere als eine geschlossene Kurve, auf die wir den Residuensatz anwenden könnten.

Wir können uns aber zunächst einmal beschränken auf das Integral von $-R$ bis R für irgendeine positive reelle Zahl R, und die Strecke von $-R$ bis R durch einen Halbkreisbogen durch die komplexe obere Halbebene zum Rand eines Halbkreises und damit einer geschlossenen Kurve ergänzen. Da wir nicht wissen, wie man komplexe Integrale berechnet, deren Integrand auf dem Integrationsweg nicht überall definiert ist, müssen wir annehmen, daß der Integrand f keine Polstellen auf der reellen Achse hat, und wir müssen R so wählen, daß keine der Polstellen in der oberen Halbebene Betrag R hat. Das ist kein Problem, denn da die Polstellen einer meromorphen Funktion keinen Häufungspunkt haben dürfen, gibt es im abgeschlossenen Halbkreis mit Radius $R+1$ höchstens endlich viele Pole; wir können R daher nötigenfalls einfach durch einen etwas größeren Wert ersetzten.

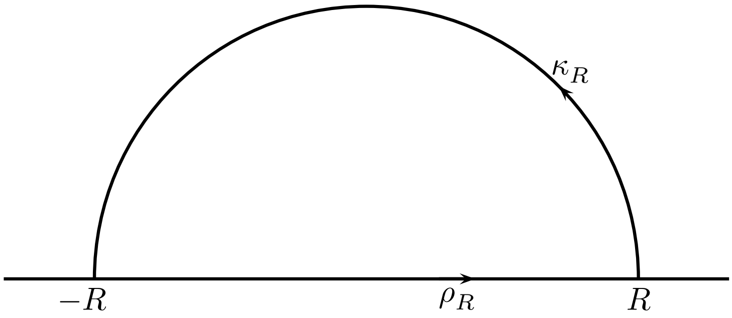
Wir betrachten nun für $R > 1$ einen Integrationsweg γ_R, der zusammengesetzt ist aus dem eigentlich interessierenden reellen Integrationsweg

$$\rho_R\colon \begin{cases} [-R, R] \to \mathbb{C} \\ \qquad t \mapsto t \end{cases}$$

von $-R$ bis R und einem Halbkreis

$$\kappa_R\colon \begin{cases} [0, \pi] \to \mathbb{C} \\ \qquad t \mapsto Re^{it} \end{cases}$$

in der oberen Halbebenen von $\mathbb{C}$, der von R im Gegenuhrzeigersinn nach $-R$ führt.



Beides zusammen bildet eine geschlossene Kurve γ_R, die einen Halbkreis berandet. Wir wollen uns kurz überlegen, daß wir auch hier das Integral ausdrücken können als $2\pi i$ mal der Summe der Residuen des Integranden Innern des Halbkreises. Die Vorgehensweise ist die gleiche wie beim Residuensatz: Da auch eine Halbkreisscheibe kompakt ist, gibt es höchstens endlich viele Punkte, in denen f nicht holomorph ist, und wir können f schreiben als Summe der Hauptteile in diesen Punkten und einer holomorphen Funktion. Das Integral über die holomorphe Funktion verschwindet wegen der Konvexität von Halbkreisen nach dem CAUCHYschen Integralsatz, das über einen Term der Form $a/(z-z_0)^n$ mit $n \geq 2$, weil es dann eine auf dem ganzen Integrationsweg holomorphe Stammfunktion gibt; bleiben also wieder nur die Integrale über Terme der Form $a/(z-z_0)$, und so ein Integral ist gleich $2\pi i \cdot a = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z_0} f$. Wir haben das zwar bislang nur für das Integral längs eines ganzen Kreises bewiesen, aber es ist klar, daß das auch für den Halbkreis gilt: Das Integral über den gesamten Kreis ist gleich der Summe der Integrale über den Halbkreis und sein Spiegelbild an der reellen Achse, wobei die Orientierung so sei, daß der Durchmesser von beiden Integrationswegen in verschiedenen Richtungen durchlaufen wird. Da $a/(z-z_0)$ in einer Umgebung des unteren Halbkreises holomorph ist, verschwindet das untere Integral nach dem CAUCHYschen Integralsatz, das obere ist also gleich dem Integral über den gesamten Kreisrand.

Leider ist in diesem Integral aber auch das Integral über κ_R enthalten, das uns nicht im geringsten interessiert. Der Ansatz ist daher nur nützlich, wenn wir dieses Integral irgendwie in den Griff bekommen können. Am einfachsten gelingt dies, wenn es für $R \to \infty$ einfach verschwindet. Bei rationalen Funktionen ist das genau dann der Fall, wenn der Zählergrad um mindestens zwei kleiner ist als der Nennergrad:

LEMMA 3.10: *a)* $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + ia_2 z^2 + a_1 z + a_0$ *und* $Q(z) = b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \cdots + b_2 z^2 + b_1 z + b_0$ *seien zwei Polynome mit* $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$ *und* $m \geq n+2$. *Dann ist für* κ_R *wie oben* $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{\kappa_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = 0$.

b) Falls Q *keine reellen Nullstellen hat, ist* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ *gleich* $2\pi i$ *mal der Summe der Residuen von* $\frac{P(z)}{Q(z)}$ *an den Polstellen mit positivem Imaginärteil.*

Beweis: Nach Definition eines komplexen Kurvenintegrals ist

$$\int\limits_{\kappa_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = \int\limits_0^\pi \frac{P(Re^{it})}{Q(e^{it})} \cdot iRe^{it}\,dt$$

$$= i\int\limits_0^\pi \frac{a_n R^{n+1}e^{i(n+1)t} + a_{n-1}R^{n-1}e^{int} + \cdots + a_1 R^2 e^{2it} + a_0 Re^{it}}{b_m R^m e^{imt} + b_{m-1}R^{m-1}e^{i(m-1)t} + \cdots + b_1 Re^{it} + b_0}\,dt\,.$$

Der Integrand rechts geht für $R \to \infty$ überall gegen Null, da der Grad $n+1$ des Zählers kleiner ist als der Grad m des Nenners. Da der Nenner nur endlich viele Nullstellen hat, liegen genau die mit positivem Imaginärteil für hinreichend große R im Innern eines jeden Halbkreises mit Radius R um Null in der oberen Halbebene. ■

Daraus ergibt sich folgendes *Kochrezept* für die Berechnung von Integralen der Form

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

mit Polynomen P und Q:

1. Man überprüfe, ob der Grad des Zählers P um mindestens zwei kleiner ist als der des Nenners Q; andernfalls ist das Verfahren nicht anwendbar.
2. Man überprüfe, ob der Nenner Q auch reelle Nullstellen hat; falls ja, ist das Verfahren nicht anwendbar.
3. Falls beide Tests erfolgreich durchlaufen wurden, ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \sum_{k=1}^{r} 2\pi i \operatorname{Res}_{z_k} \frac{P(z)}{Q(z)}\,,$$

wobei $z_1, \ldots, z_r$ die Nullstellen *mit positivem Imaginärteil* von $Q(z)$ sind.

Man beachte, daß die Nullstellen von Q mit negativem Imaginärteil keine Rolle spielen.

Betrachten wir etwa als erstes Beispiel das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{x^2+2x+5}\,dx\,.$$

Der Zähler ist konstant, hat also Grad null, und der Nenner hat Grad zwei; die erforderliche Graddifferenz von mindestens zwei ist also vorhanden. Als nächstes müssen wir die Nullstellen des Nenners bestimmen:

$$x^2+2x+5=0 \iff (x+1)^2+4=0 \iff x=-1\pm 2i\,.$$

Keine dieser Nullstellen ist reell, und nur $-1+2i$ hat positiven Imaginärteil. Somit ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{x^2+2x+5}\,dx = 2\pi i \operatorname{Res}_{-1+2i} \frac{2}{z^2+2z+5}\,.$$

(Daß hier statt x ein z steht hat rein kosmetische Gründe: Wenn es um komplexe Funktionen geht, bezeichnet man die Variable einfach gewohnheitsmäßig mit z.)

Da die beiden Nullstellen des Nenners einfach sind, haben auch die Pole nur die Ordnung eins; daher läßt sich das gesuchte Residuum einfach bestimmen als

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{-1+2i} \frac{2}{z^2+2z+5} &= \lim_{z\to-1+2i} \frac{2\bigl(z-(-1+2i)\bigr)}{z^2+2z+5} \\ &= \lim_{z\to-1+2i} \frac{2\bigl(z-(-1+2i)\bigr)}{\bigl(z-(-1+2i)\bigr)\bigl(z-(-1-2i)\bigr)} \\ &= \lim_{z\to-1+2i} \frac{2}{z-(-1-2i)} = \frac{2}{-1+2i-(-1-2i)} = \frac{2}{4i} = \frac{1}{2i}\,.\end{aligned}$$

Somit ist $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{x^2+2x+5}\,dx = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi\,.$

(Da wir ein reelles Integral haben, war von vornherein klar, daß das Ergebnis trotz des Umwegs über komplexe Zahlen einen reellen Wert haben muß; diese Plausibilitätskontrolle kann gegebenenfalls Rechenfehler aufdecken.)

Als etwas komplizierteres Beispiel betrachten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}\,.$$

Natürlich können wir via Partialbruchzerlegung eine Stammfunktion des Integranden finden, allerdings müssen wir dafür doch einiges arbeiten, und das Ergebnis

$$\begin{aligned}F(x) &= \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \frac{x^2+\sqrt{2}\,x+1}{x^2-\sqrt{2}\,x+1} \\ &\qquad + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}\,x+1) + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}\,x-1)\end{aligned}$$

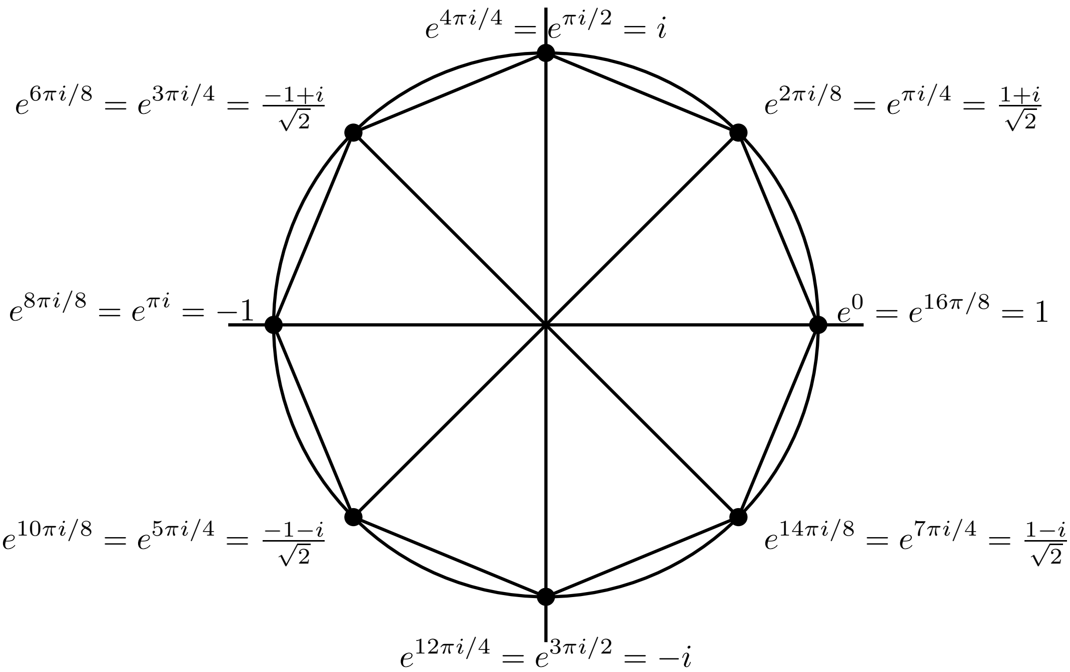
ist alles andere als angenehm.

Um auch dieses Integral über den Residuenkalkül ausrechnen zu können, setzen wir den Integranden fort zu einer komplexen Funktion $f(z) = 1/(z^4+1)$; diese ist holomorph in allen Punkten $z \in \mathbb{C}$, in denen der Nenner z^4+1 nicht verschwindet.

Nach der dritten binomischen Formel ist $(z^4+1)(z^4-1) = (z^8-1)$, also $z^4+1 = (z^8-1)/(z^4-1)$. Die Nullstellen des Polynoms z^n-1 sind die n-ten Einheitswurzeln; wie wir aus Kapitel 1 wissen gibt es genau n davon, nämlich

$$1 = e^0, \quad e^{2k\pi i/n}, \quad e^{4k\pi i/n}, \quad \ldots, \quad e^{(n-1)\cdot 2\pi i/n}\,.$$

Auf dem Einheitskreis sind sie die Eckpunkte eines regelmäßigen n-Ecks, was die folgende Zeichnung für den Fall $n=8$ illustriert:



Ist m ein Teiler von n, so ist jede m-te Einheitswurzel erst recht eine m-ten Einheitswurzeln; wir bezeichnen eine n-te Einheitswurzel als *primitiv,* wenn es keinen echten Teiler m von n gibt, für den sie bereits m-te Einheitswurzel ist.

Eine achte Einheitswurzel ist offenbar genau dann primitiv, wenn sie nicht gleichzeitig vierte Einheitswurzel ist; die Nullstellen von z^4+1 sind also genau die primitiven achten Einheitswurzeln

$$e^{\pi i/4}, \quad e^{3\pi i/4}, \quad e^{5\pi i/4} \quad \text{und} \quad e^{7\pi i/4},$$

von denen allerdings nur $e^{\pi i/4}$ und $e^{3\pi i/4}$ positiven Imaginärteil haben. Nach dem Residuensatz ist daher

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = 2\pi i\big(\operatorname{Res}_{e^{\pi i/4}} f + \operatorname{Res}_{e^{3\pi i/4}} f\big)\,.$$

Die Residuen lassen sich, da alle Nullstellen einfach sind, wie oben bestimmen; beispielsweise ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{e^{\pi i/4}} f &= \lim_{z\to e^{\pi i/4}} \frac{z-e^{\pi i/4}}{z^4+1} \\
&= \lim_{z\to e^{\pi i/4}} \frac{z-e^{\pi i/4}}{(z-e^{\pi i/4})(z+e^{\pi i/4})(z-e^{3\pi i/4})(z+e^{3\pi i/4})} \\
&= \frac{1}{2e^{\pi i/4}(e^{\pi i/4}-e^{3\pi i/4})(e^{\pi i/4}+e^{3\pi i/4})} \\
&= \frac{1}{2e^{\pi i/4}(e^{\pi i/2}-2e^{3\pi i/2})} \\
&= \frac{1}{2e^{\pi i/4}\big(i-(-i)\big)} = \frac{e^{-\pi i/4}}{4i} = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i)}{4i} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}(-1-i)\,,
\end{aligned}$$

und genauso könnte man auch

$$\operatorname{Res}_{e^{\pi i/4}} f = \frac{\sqrt{2}}{8}(1-i)$$

berechnen. Einfacher geht es allerdings zumindest in diesem Fall mit der Regel von DE L'HOSPITAL: Danach ist

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{e^{\pi i/4}} f &= \lim_{z\to e^{\pi i/4}} \frac{z-e^{\pi i/4}}{z^4+1}\\ &= \lim_{z\to e^{\pi i/4}} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4e^{3\pi i/4}} = \frac{1}{4}e^{-3\pi i/4}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{e^{3\pi i/4}} f &= \lim_{z\to e^{3\pi i/4}} \frac{z-e^{3\pi i/4}}{z^4+1}\\ &= \lim_{z\to e^{3\pi i/4}} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4e^{9\pi i/4}} = \frac{1}{4}e^{-9\pi i/4} = \frac{1}{4}e^{-\pi i/4}\,.\end{aligned}$$

Somit ist

$$\operatorname{Res}_{e^{\pi i/4}} f + \operatorname{Res}_{e^{3\pi i/4}} f = \frac{e^{-3\pi i/4}+e^{-\pi i/4}}{4}\,.$$

Nach den EULERschen Formeln läßt sich das noch vereinfachen zu

$$\begin{aligned}\frac{e^{-3\pi i/4}+e^{-\pi i/4}}{4} &= e^{-\pi i/2}\cdot\frac{e^{-\pi i/4}+e^{\pi i/4}}{4} = \frac{e^{-\pi i/2}}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{4}\\ &= -\frac{i}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{i\sqrt{2}}{4}\,.\end{aligned}$$

Damit ist also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = 2\pi i\big(\operatorname{Res} e^{\pi i/4} f + \operatorname{Res}_{e^{3\pi i/4}} f\big) = \pi\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Gelegentlich läßt sich ein reelles Integral auch über eine direkte Substitution in ein komplexes Integral über eine geschlossene Kurve überführen, beispielsweise kann ein Integral von 0 bis 2π über einen Ausdruck in $\sin t$ und $\cos t$ manchmal direkt als komplexes Integral über eine Kreislinie interpretiert und dann nach dem Residuensatz ausgerechnet werden; wie man solche Substitutionen findet, ist wie üblich Erfahrungssache, auch wenn es dazu einige Faustregeln gibt.

Als ein Beispiel dazu betrachten wir das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx\,,$$

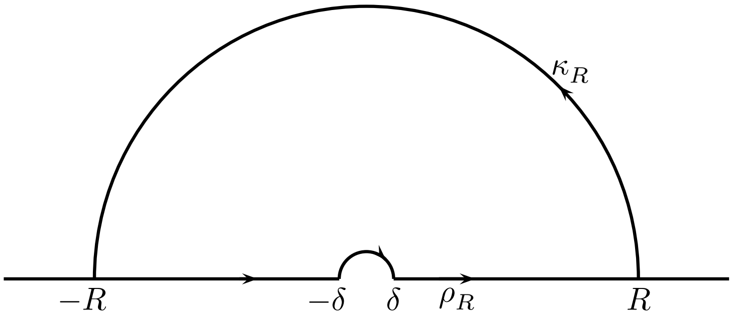
das zum Beispiel bei der Untersuchung der Konvergenz von FOURIER-Reihen eine wichtige Rolle spielt. Es hat auch sonst viele Anwendungen, denn der Integrand, die sogenannte sinc-Funktion, ist die FOURIER-Transformierte eines Rechteckimpulses.

Da wir $\dfrac{\sin z}{z}$ auf einem Kreis um den Nullpunkt für immer größer werdenden Radius nicht abschätzen können, hat es keinen Sinn, das Integral über einen Halbkreis zu berechnen – ganz abgesehen davon, daß es wegen der Holomorphie des Integranden ohnehin verschwindet.

Wie sich zeigen wird, kommen wir ans Ziel, wenn wir das etwas allgemeinere Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\, dx$$

betrachten. Dazu definieren wir, der Philosophie dieses Abschnitts entsprechend, ein komplexes Kurvenintegral über e^{iz}/z. Da der Integrand an der Stelle $z = 0$ eine Polstelle hat, können wir allerdings nicht einfach auf der reellen Achse von $-R$ nach R integrieren, sondern müssen den Nullpunkt auf einem kleinen Halbkreisbogen β_δ vom Radius δ umfahren. Diese Umleitung wird im Uhrzeigersinn durchlaufen. Von R aus gehen wir auf einem Halbkreisbogen κ_R im Gegenuhrzeigersinn zu $-R$ und haben somit einen geschlossenen Integrationsweg:



Da der Integrand außerhalb des Nullpunkts holomorph ist, verschindet das Integral über den gesamten Bogen nach dem CAUCHYschen Integralsatz, d.h.

$$\int_{-R}^{-\delta} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{\beta_\delta} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{\delta}^{R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{\kappa_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0\,.$$

Für $z = x + iy$ hat $e^{iz} = e^{-y}e^{ix}$ Betrag e^{-y}. Damit ist

$$\left|\int_{\kappa_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz\right| = \left|\int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}} \cdot iRe^{it}\,dt\right| \le \int_0^\pi \left|\frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}}\right| \cdot iRe^{it}$$

$$= \int_0^\pi e^{-R\sin t}\,dt\,.$$

Um die rechte Seite weiter abzuschätzen, wählen wir ein $\eta > 0$ und schreiben

$$\int_0^\pi e^{-R\sin t}\,dt = \int_0^\eta e^{-R\sin t}\,dt + \int_\eta^{\pi-\eta} e^{-R\sin t}\,dt + \int_{\pi-\eta}^{\pi} e^{-R\sin t}\,dt\,.$$

Im ersten und im drittem Integral schätzen wir den Integranden ab durch eins und erhalten somit η als obere Schranke für das Integral; beim mittleren Integral ist der Integrand höchstens gleich $e^{-R\sin\eta}$. Wählen wir nun für ein $\varepsilon > 0$ den Winkel η so, daß $\eta < \frac{1}{3}\varepsilon$ ist, und wählen wir dazu den Radius R so groß, daß $e^{-R\sin\eta} < \varepsilon/3\pi$ ist, erhalten wir die Abschätzung

$$\left|\int\limits_{\kappa_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz\right| \leq 2\eta + (\pi - 2\eta)\,e^{-R\sin\eta} < \varepsilon\,.$$

Somit verschwindet auch hier das Integral längs κ_R für $R \to \infty$.

Lassen wir in der obigen Summe von vier Integralen R gegen ∞ gehen, erhalten wir somit die Gleichung

$$\int\limits_{-\infty}^{-\delta} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int\limits_{\beta_\delta} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0$$

oder

$$\int\limits_{-\infty}^{-\delta} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = -\int\limits_{\beta_\delta} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \int\limits_{\alpha_\delta} \frac{e^{iz}}{z}\,dz\,,$$

wobei α_δ den rückwärts, also im *Gegenuhrzeigersinn* durchlaufenen Halbkreisbogen β_δ bezeichnets, d.h. den Integrationsweg

$$\alpha_\delta\colon \begin{cases} [0,\,\pi] \to \mathbb{C} \\ \qquad t \mapsto \delta e^{it} \end{cases}.$$

In der Summenentwicklung

$$\int\limits_{\alpha_\delta} \frac{e^{iz}}{z} = \int\limits_{\alpha_\delta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k z^{k-1}}{k!}\,dz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \int\limits_{\alpha_\delta} z^{k-1}\,dz$$

ist das rechtsstehende Integral für $k = 0$

$$\int\limits_{\alpha_\delta} z^{-1}\,dz = \int\limits_0^{\pi} \alpha_\delta(t)^{-1} \cdot \alpha_\delta'(t)\,dt = \int\limits_0^{\pi} \delta^{-1}e^{-it} \cdot i\delta e^{it}\,dt = \int\limits_0^{\pi} i\,dt = \pi i$$

unabhängig von δ; im Falle $k \neq 0$ verschwindet

$$\int\limits_{\alpha_\delta} z^{k-1}\,dz = \frac{(-\delta)^k - \delta^k}{k}$$

für gerade k und ist gleich $-2\delta^k/k$ für ungerade k. Somit ist

$$\int\limits_{-\infty}^{-\delta} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \pi i - 2\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(i\delta)^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!(2\ell+1)}$$

$$= \pi i - 2i\delta \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-\delta^2)^\ell}{(2\ell+1)!(2\ell+1)}\,.$$

Die rechts stehende Summe hat die Exponentialreihe für $e^{-\delta^2}$ als konvergente Majorante, konvergiert also für alle $\delta \in \mathbb{R}$. Speziell für die Imaginärteile folgt

$$\int\limits_{-\infty}^{-\delta} \frac{\sin x}{x}\,dx + \int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi - 2\delta \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-\delta^2)^\ell}{(2\ell+1)!(2\ell+1)}\,.$$

Da $\frac{\sin x}{x}$ eine gerade Funktion ist, sind die beiden Integrale auf der linken Seite gleich; wegen der Konvergenz der rechten Seite folgt damit insbesondere, daß beide existieren. Im Gegensatz zu e^{iz}/z hat $\frac{\sin(x)}{x}$ an der Stelle Null keine Polstelle, denn bekanntlich ist $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Daher ist $\frac{\sin x}{x}$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktion, so daß das Integral von $-\delta$ bis δ über diese Funktion existiert. Somit existiert auch

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{-\delta} \frac{\sin x}{x}\,dx + \int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin x}{x}\,dx + \int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx\,.$$

Für $\delta \to 0$ geht das mittlere Integral gegen Null und die Summe der beiden äußeren gegen π, also ist

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi\,.$$