Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

21. April 2017

Modulklausur Elemente der Funktionentheorie

• • • Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen! • • •
• • • Die Aufgaben müssen *nicht* in der angegebenen Reihenfolge • • •
• • • bearbeitet werden; konzentrieren sie sich zunächst • • •
• • • auf das, womit sie schnell Punkte holen können! • • •

Aufgabe 1: (*10 Punkte*)
Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen:

a) $(i+3)(i-3)$ *b)* $\dfrac{3+4i}{1-2i}$ *c)* $(i-1)^2$ *d)* $\dfrac{(i-1)^{100}}{2^{50}}$ *e)* $\sqrt{i}$

Lösung:

a) $(i+3)(i-3) = i^2 - 3^2 = -10$

b) $\dfrac{3+4i}{1-2i} = \dfrac{(3+4i)(1+2i)}{1^2+2^2} = \dfrac{-5+10i}{5} = -1+2i$

c) $(1-i)^2 = 1^2 - 2i + i^2 = -2i$

d) $\dfrac{(i-1)^{100}}{2^{50}} = \dfrac{(-2i)^{50}}{2^{50}} = (-i)^{50} = (-i)^{48} \cdot (-i)^2 = -1$

e) $i = e^{\pi i/2}$, also ist $e^{\pi i/4} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ die eine Quadratwurzel; die andere ist natürlich $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

Aufgabe 2: (*8 Punkte*)

a) Zeigen Sie: Jede komplexe Zahl z vom Betrag eins läßt sich darstellen in der Form $z = w/\overline{w}$ mit $w \in \mathbb{C}$.

Lösung: Eine komplexe Zahl z vom Betrag eins hat in Polarkoordinaten eine Darstellung der Form $z = e^{i\varphi}$. Schreiben wir auch $w = re^{i\psi}$ in Polarkoordinaten, ist

$$\frac{w}{\overline{w}} = \frac{re^{i\psi}}{re^{-i\psi}} = e^{i\cdot 2\psi}\,.$$

Mit beliebigem $r > 0$ und $\psi = \frac{1}{2}\varphi$ ist also $w = re^{i\psi}$ eine Zahl mit $\frac{w}{\overline{w}} = z$.

b) Wie viele mögliche Zahlen w gibt es, wenn noch zusätzlich verlangt wird, daß auch w den Betrag eins haben soll?

Lösung: Nun muß $r = 1$ sein, also suchen wir Zahlen $w = e^{i\psi}$ mit $e^{i\cdot 2\psi} = e^{i\varphi}$. Außer $\psi = \varphi/2$ hat auch $\pi + \varphi/2$ noch diese Eigenschaft; es gibt also die beiden Lösungen $w_1 = e^{i\varphi/2}$ und $w_2 = e^{i(\pi+\varphi/2)} = -e^{i\varphi/2} = -w_1$.

c) Zeigen Sie, daß dann $w/\overline{w} = w^2$ ist!

Lösung: Wegen $|w| = 1$ ist $w\overline{w} = 1$, d.h. $\dfrac{w}{\overline{w}} = \dfrac{w^2}{\overline{w}w} = w^2$.

Aufgabe 3: *(12 Punkte)*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen irgendwo holomorph sind, und geben Sie gegebenenfalls das größtmögliche Teilgebiet G von $\mathbb{C}$ an, auf dem dies der Fall ist! Untersuchen Sie auch, ob die jeweilige Funktion in den Punkten, in denen sie nicht holomorph ist, meromorph ist!

a) $f(z) = e^{\sin(e^z+z^2)}$ *b)* $f(z) = |z|^2 - 2(\mathfrak{Im}\, z)^2 + 2i(\mathfrak{Re}\, z)(\mathfrak{Im}\, z)$ *c)* $f(z) = z^2 + (\overline{z})^2$

d) $f(z) = \dfrac{21z}{(z^2+4)(z^2+2017)}$

Begründen Sie ihre Aussagen!

Lösung:

a) Da sowohl die Exponentialfunktion als auch der Sinus auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph sind, ist auch f auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph.

b) Für $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ ist

$$f(z) = x^2 + y^2 - 2y^2 + 2ixy = x^2 + 2ixy - y^2 = (x+iy)^2 = z^2\,,$$

und diese Funktion ist natürlich auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph.

c) Hier ist für $z = x + iy$

$$f(z) = (x^2 - y^2) + 2ixy + (x^2 - y^2) - 2ixy = 2(x^2 - y^2) \in \mathbb{R}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Da die Funktion nicht konstant ist, kann sie nicht holomorph sein, was man auch direkt aus den CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen ablesen kann: $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ mit $u(x,y) = 2(x^2 - y^2)$ und $v(x,y)$ identisch Null. Da weder $u_x(x,y) = 4x$ noch $u_y(x,y) = -4y$ identisch verschwindet, ist keine der beiden Gleichungen erfüllt.

d) Der Nenner dieser Funktion verschwindet bei $z = \pm 2i$ und $z = \pm\sqrt{2017}\,i$, ohne daß dort der Zähler verschwindet. Somit hat die Funktion dort Pole und ist nur holomorph auf $\mathbb{C}$ ohne diese vier Punkte. Da sie dort Pole hat, ist sie meromorph auf ganz $\mathbb{C}$, als rationale Funktion sogar auf $\widehat{\mathbb{C}}$.

Aufgabe 4: *(8 Punkte)*

D sei die Kreisscheibe mit Radius eins um den Nullpunkt, und $\triangle$ sei das Dreieck mit den dritten Einheitswurzeln 1, $\zeta_3 = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ und $\overline{\zeta_3} = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$ als Ecken. Weiter sei f eine im Gebiet $G = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{4} < |z| < 5\}$ holomorphe Funktion. Dann gilt

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = \int_{\partial \Delta} f(z)\,dz\,.$$

(*Hinweis:* Betrachten Sie die drei Dreiecksseiten jeweils einzeln, zusammen mit den darüberliegenden Drittelkreisen.)

Lösung: $\triangle$ ist ein gleichseitiges Dreieck dessen Umkreis der Einheitskreis $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ist. Der Inkreis hat ebenfalls den Nullpunkt als Mittelpunkt und berührt die Kantenmittelpunkte, also beispielsweise den Punkt $z = -\frac{1}{2}$ auf der Kante von ζ_3 nach $\overline{\zeta_3}$. Somit hat er den Radius $\frac{1}{2}$, d.h. alle Kanten liegen vollständig im Gebiet G. Sind γ_1, γ_2 und γ_3 die drei Integrationswege, die jeweils eine der drei Kanten im Uhrzeigersinn durchlaufen und dann über einen drittel Einheitskreisbogen im Gegenuhrzeigersinn zum Ausgangspunkt zurückkehren, ist

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz - \int_{\partial \triangle} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{3} \int_{\gamma_k} f(z)\,dz\,.$$

Die drei Integrale rechts verschwinden nach dem CAUCHYschen Integralsatz, da die drei Wege γ_k ganz in G liegen und f dort holomorph ist; somit müssen die beiden Integrale links gleich sein.

Aufgabe 5: *(15 Punkte)*

D sei die Kreisscheibe mit Radius zwei um den Nullpunkt. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_{\partial D} |z|^2\,dz$ *b)* $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{dz}{z-1}$ *c)* $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{5z}{z-3}\,dz$ *d)* $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{2z}{z^2-2z+2}\,dz$ *e)* $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{\cos z}{z^3}\,dz$

Lösung:

a) Auf dem Rand von D ist $|z| = 2$; somit ist

$$\int_{\partial D} |z|^2\,dz = \int_{\partial D} 4\,dz = 0$$

nach dem CAUCHYschen Integralsatz.

b) Der Integrand hat in D genau eine Polstelle, nämlich bei $z = 1$. Das Residuum dort ist gleich eins, denn die LAURENT-Reihe um eins ist gerade $1/(z-z_0)$. Somit hat das Integral nach dem Residuensatz den Wert $2\pi i$.

Alternativ: Wende die CAUCHYsche Integralformel $2\pi i f(1) = \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-1}\,dz$ an auf $f(z) = 1$.

c) Dieser Integrand ist holomorph auf der offenen Kreisscheibe mit Radius fünf um den Nullpunkt, die den Abschluß von D enthält; daher verschwindet das Integral nach dem CAUCHYschen Integralsatz.

d) $z^2-2z+2 = (z-1)^2+1$ verschwindet in den beiden Punkten $z_1 = 1+i$ und $z_2 = 1-i$; beide liegen im Innern von D. Der Integrand hat an beiden Stellen einen Pol erster Ordnung; wir können das Residuum daher nach der Limesformel berechnen:

$$\operatorname{Res}_{z_1} \frac{2z}{(z-z_1)(z-z_2)} = \lim_{z\to z_1} \frac{2z\cdot(z-z_1)}{(z-z_1)(z-z_2)} = \lim_{z\to z_1} \frac{2z}{z-z_2} = \frac{2z_1}{z_1-z_2} = \frac{2+2i}{2i} = 1-i$$

und

$$\operatorname{Res}_{z_2} \frac{2z}{(z-z_1)(z-z_2)} = \lim_{z\to z_2} \frac{2z\cdot(z-z_2)}{(z-z_1)(z-z_2)} = \lim_{z\to z_2} \frac{2z}{z-z_1} = \frac{2z_2}{z_2-z_1} = \frac{2-2i}{-2i} = 1+i\,.$$

Nach dem Residuensatz ist daher

$$\int_{\partial D} \frac{2z}{z^2-2z+2}\,dz = 2\pi i\cdot\big((1-i)+(1+i)\big) = 4\pi i\,.$$

e) Der Kosinus ist auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph; dividieren wir durch z^3, entsteht an der Stelle $z = 0$ ein Pol dritter Ordnung. Dividieren wir die TAYLOR-Reihe des Kosinus durch z^3, so erhalten wir die LAURENT-Reihe des Integranden um den Punkt $z = 0$:

$$\frac{\cos z}{z^3} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2z} + \frac{z}{24} - \frac{z^3}{720} + \cdots\,,$$

das Residuum im Punkt Null ist somit gleich $-\frac{1}{2}$. Damit ist das Integral nach dem Residuensatz gleich $2\pi i\cdot(-\frac{1}{2}) = -\pi i$.

NB: Viele wollten hier die CAUCHYsche Integralformel auf $\frac{\cos z}{z^2}$ anwenden. Diese Funktion ist aber nicht holomorph auf D, da sie im Nullpunkt einen Pol hat. Die CAUCHYsche Integralformel kann nur angewandt werden auf $f(z) = \cos z$ in der Form

$$\frac{2\pi i}{2!}f''(0) = \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z^3}\,dz\,;$$

da die zweite Ableitung des Kosinus $-\cos z$ ist, erhält man natürlich auch so den Wert $-\pi i$ für das Integral.

Aufgabe 6: *(7 Punkte)*

Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{20x}{(x^2+1)(x^2-2x+5)}\,dx\,!$

Lösung: $z^2-2z+5=(z-1)^2+4$ verschwindet für $z=1\pm 2i$, hat also genau wie z^2+1 keine reellen Nullstellen. Da der Nennergrad vier den Zählergrad eins um mindestens zwei übersteigt und der Nenner keine reellen Nullstellen hat, können wir das Integral somit berechnen als $2\pi i$ mal der Summe der Residuen an den Polstellen mit positivem Imaginärteil, also bei $z_1=i$ und $z_2=1+2i$. Da der Nenner vier verschiedene Nullstellen hat, sind alle einfach, d.h. wir haben bei z_1 und z_2 Pole erster Ordnung und können die Residuen über die Limesformel berechnen:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_i \frac{20z}{(z^2+1)(z^2-2z+5)} &= \lim_{z\to i}\frac{20z(z-i)}{(z^2+1)(z^2-2z+5)} = \lim_{z\to i}\frac{20z}{(z+i)(z^2-2z+5)}\\ &= \frac{20i}{2i\cdot(-1-2i+5)} = \frac{10}{4-2i} = \frac{5}{2-i} = \frac{10+5i}{2^2+1^2} = 2+i\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{1+2i} \frac{20z}{(z^2+1)(z^2-2z+5)} &= \lim_{z\to 1+2i}\frac{20z(z-1-2i)}{(z^2+1)(z^2-2z+5)}\\ &= \lim_{z\to 1+2i}\frac{20z}{\big((1+2i)^2+1\big)\big((1+2i)-(1-2i)\big)} = \frac{20+40i}{(-2+4i)\cdot 4i}\\ &= \frac{20+40i}{-16-8i} = -\frac{5+10i}{4+2i} = -\frac{(5+10i)(4-2i)}{4^2+2^2} = -\frac{40+30i}{20} = -2-\frac{3}{2}i\,.\end{aligned}$$

Die Summe der beiden Residuen ist somit $-\frac{1}{2}i$; Multiplikation mit $2\pi i$ ergibt

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{20x}{(x^2+1)(x^2-2x+5)}\,dx = \pi\,.$$