

19. Mai 2017

11. Übungsblatt Funktionentheorie I

Aufgabe 1: (6 Punkte)

- a) Berechnen Sie $\sum_{j=1}^{\infty} 1/j^2$ durch Vergleich von TAYLORentwicklung und Produktdarstellung der Funktion $\sin \pi z$!
- b) Zeigen Sie: $-i \sin(\pi z) \sin(i\pi z) = \pi^2 z^2 \prod_{j=1}^{\infty} (1 - z^4/j^4)$.
- c) Was ist $\sum_{j=1}^{\infty} 1/j^4$?

Aufgabe 2: (4 Punkte)

- a) Berechnen Sie über die Produktentwicklungen die Quotienten

$$\frac{\sin(\pi/4)}{\sin(\pi/2)} \quad \text{und} \quad \frac{\sin(\pi/6)}{\sin(\pi/3)},$$

und leiten Sie daraus Produktentwicklungen für $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ ab! Beachten Sie dabei, daß jeweils eines der beiden Produkte Teilprodukt des anderen ist, und kürzen Sie entsprechend!

Aufgabe 3: (10 Punkte)

- a) Berechnen Sie $\Gamma(n/2)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $|n| \leq 10$, also für alle ganz- und halbzahligen Werte zwischen -5 und 5 !
- b) Leiten Sie aus der Produktdarstellung von $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$ eine Formel für $\Gamma(z)\Gamma(-z)$ ab!
- c) Zeigen Sie, daß $\Gamma(z)$ nie Null wird!
- d) Zeigen Sie, daß die Γ -Funktion für alle $z \in \mathbb{R}$ entweder einen Pol oder einen reellen Wert hat!
- e) Bestimmen Sie das Vorzeichen von $\Gamma(z)$ im Intervall $(n, n+1)$ für jedes $n \in \mathbb{Z}$.

Abgabe bis zum Freitag, dem 26. Mai 2017, um 12.00 Uhr