Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

12. Mai 2017

10. Übungsblatt Funktionentheorie I

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

a) Die komplexe Zahl $z = re^{i\varphi}$ sei in Polarkoordinatendarstellung gegeben mit $\varphi \in (-\pi, \pi]$. Was ist der Hauptwert ihres Logarithmus?

b) Bestimmen Sie den Hauptwert des Logarithmus von $1 + i$!

c) Zerlegen Sie die Taylor-Reihe von $\operatorname{Log}(1 + x)$ an der Stelle $x = i$ in ihren Real- und Imaginärteil, und geben Sie so Reihen an, die gegen Real- und Imaginärteil von $\operatorname{Log}(1+i)$ konvergieren!

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Die Funktion $f\colon \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \dfrac{\sin iz}{e^{2z} - 1} \end{cases}$ ist holomorph auf $\mathbb{C}$ und hat keine Nullstellen.

b) Finden Sie eine holomorphe Funktion $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, so daß $f(z) = e^{g(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$!

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Zeigen Sie die eigentliche Konvergenz von $\displaystyle\prod_{j=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)$, und berechnen Sie den Grenzwert!

b) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist das Produkt $\displaystyle\prod_{j=1}^{\infty}(1 - z^n)$ absolut konvergent?

Aufgabe 4: *(4 Punkte)*

a) Konstruieren Sie eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die für jede natürliche Zahl k eine k-fache Nullstelle hat und sonst nirgends verschwindet!

b) Um eine holomorphe Funktion zu konstruieren, die nirgends auf $\mathbb{C}$ verschwindet, könnte man den Grenzfunktion der Folge der Funktionen

$$f_n(z) = \frac{\sin z}{\prod\limits_{k=-n}^{n}(z - k\pi)}$$

betrachten. Führt dies zum gewünschten Ergebnis?

Abgabe bis zum Freitag, dem 19. Mai 2017, um 12.00 Uhr