Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

5. Mai 2017

9. Übungsblatt Funktionentheorie I

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

a) Das Gebiet G sei einfach zusammenhängend. Zeigen Sie, daß jede in G holomorphe Funktion f dort eine Stammfunktion hat!

b) Finden Sie ein möglichst großes einfach zusammenhängendes Gebiet G, in dem die Funktion $z \mapsto 1/z$ holomorph ist, und geben Sie eine Stammfunktion an!

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

a) Ein beschränktes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ heiße r-fach zusammenhängend, wenn $\mathbb{C} \setminus G$ aus r Zusammenhangskomponenten besteht. Zeigen Sie, daß G genau dann 1-fach zusammenhängend ist, wenn es einfach zusammenhängend ist.

b) Wenn der Rand eines beschränkten einfach zusammenhängenden Gebiets ein Integrationsweg ist, ist er eine Jordan-Kurve.

c) Finden Sie ein 2-fach zusammenhängendes Gebiet mit einem Integrationsweg als Rand!

d) Finden Sie ein beschränktes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, das für kein $r \in \mathbb{N}$ r-fach zusammenhängend ist!

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Auf dem Gebiet G existiere ein Zweig $L\colon G \to \mathbb{C}$ des Logarithmus, d.h. eine holomorphe Funktion L, für die $e^{L(z)} = z$ ist für alle $z \in G$. Zeigen Sie, daß $L'(z) = 1/z$ für alle $z \in G$!

b) Das Gebiet G sei disjunkt zum Halbstrahl h und $L\colon G \to \mathbb{C}$ sei ein Zweig des Logarithmus auf G. Dann ist für jedes $z_0 \in G$

$$L(z) = L(z_0) + \int_\gamma \frac{dz}{z}\,,$$

wobei γ einen beliebigen in G verlaufenden Integrationsweg mit Anfangspunkt z_0 und Endpunkt z bezeichnet.

c) Auf jedem einfach zusammenhängenden Gebiet $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es einen Zweig des Logarithmus.

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*

a) Für jeden Zweig $L\colon G \to \mathbb{C}$ des Logarithmus gibt es zu je zwei Punkten $w, z \in G$ ganze Zahlen $k, \ell \in \mathbb{Z}$, so daß $L(wz) = L(w) + L(z) + 2k\pi i$ und $L(w/z) = L(w) - L(z) + 2\ell\pi i$.

b) Finden Sie für den Hauptwert des Logarithmus zwei komplexe Zahlen $w, z \in \mathbb{C}$, für die $\operatorname{Log}(wz) \neq \operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w$.

c) Definieren Sie analog zum Fall der Funktion $z \mapsto a^z$ für beliebiges $a \in \mathbb{C}$ Zweige einer Funktion $z \mapsto z^a$!

d) Auf welcher Art von Gebieten kann $z \mapsto z^a$ so als holomorphe Funktion definiert werden?

e) Geben Sie für jede natürliche Zahl n ein a an, so daß diese Funktion n Zweige hat. Für welche $a \in \mathbb{C}$ gibt es unendlich viele Zweige?

Abgabe bis zum Freitag, dem 12. Mai 2017, um 12.00 Uhr