WOLFGANG K. SEILER
*Tel.* 2515

A5, C201

*28. April 2017*

# 8. Übungsblatt Funktionentheorie I

**Aufgabe 1:** *(7 Punkte)*

$f: G \to \widehat{\mathbb{C}}$ sei meromorph im Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, und $\gamma: [a, b] \to G$ sei ein Integrationsweg, der durch keine Nullstelle und keinen Pol von $f$ gehe. Außerdem sei $\gamma$, als Kette aufgefaßt, ein nullhomologer Zyklus.

*a)* Zeigen Sie, daß es stetige Funktionen $r, \varphi: [a, b] \to \mathbb{R}$ gibt, so daß $f\big(\gamma(t)\big) = r(t)e^{i\varphi(t)}$ für alle $t \in [a, b]$.

*b)* $\varphi(b) - \varphi(a) = 2\pi \sum\limits_{z\in G} n(\gamma, z) \operatorname{ord}_z f$. (*Hinweis:* Betrachten Sie den Integrationsweg $f \circ \gamma: [a, b] \to \mathbb{C}$ und führen Sie $n(f \circ \gamma, 0) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{f\circ\gamma} \frac{dz}{z}$ nach der Substitutionsregel auf ein Integral über $\gamma$ zurück. Rechnen Sie dieses weiter aus, indem Sie *a)* anwenden.)

**Aufgabe 2:** *(8 Punkte)*

Welche der folgenden offenen Mengen sind einfach zusammenhängend, welche nicht? Begründen Sie ihre Aussagen.

*a)* $\mathbb{C} \setminus \{r \in \mathbb{R} \mid r < 0\}$

*b)* $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$

*c)* $\{z \in \mathbb{C} \mid 2 < \mathfrak{Re}\, z < 3\}$

*d)* $\{z \in \mathbb{C} \mid 3 < |z| < 4\}$

*e)* $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 5\}$

*f)* $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 6| < 6 \vee |z + 6| < 6\}$

*g)* $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}\, z \neq 0 \wedge |\mathfrak{Im}\, z| < 7\} \cup \{ir \in i\mathbb{R} \mid 6 < |r| < 7\}$

*h)* $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}\, z \neq 0 \wedge |\mathfrak{Im}\, z| < 8\} \cup \{ir \in i\mathbb{R} \mid |r| < 7\}$

**Aufgabe 3:** *(5 Punkte)*

*a)* Jedes konvexe Gebiet ist einfach zusammenhängend.

*b)* $G \subset \mathbb{C}$ sei einfach zusammenhängend, $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei stetig und habe eine stetige Umkehrfunktion $\psi: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Dann ist auch $H = \varphi(G)$ einfach zusammenhängend.

*c)* Ist auch jedes holomorphe Bild eines einfach zusammenhängenden Gebiets wieder einfach zusammenhängend? (*Hinweis:* Betrachten Sie beispielsweise die Exponentialfunktion.)

**Abgabe** bis zum Freitag, dem 5. Mai 2017, um 12.00 Uhr