WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

31. März 2017

6. Übungsblatt Funktionentheorie I

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*
D sei die Kreisscheibe mit Radius eins um den Punkt 3. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{dz}{z-\pi}$ *b)* $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{dz}{(z-\pi)^2}$ *c)* $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{dz}{z^2-\pi^2}$ *d)* $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{dz}{(z-\pi)^{2017}}$ *e)* $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{dz}{z-\pi^{2017}}$

Lösung: *a)* $1/(z-\pi)$ ist holomorph auf $\mathbb{C} \smallsetminus \{\pi\}$, und π liegt im Innern von D. Somit ist dieses Integral gleich $2\pi i$.

b) $1/(z-\pi)^2$ hat die überall auf dem Kreisrand holomorphe Stammfunktion $-1/(z-\pi)$; somit verschwindet das Integral.

Alternativ: Die LAURENT-Reihe um π besteht nur aus dem einen Term $(z-\pi)^{-2}$; das Residuum an der einzigen Polstelle π ist also Null, so daß das Integral nach dem Residuensatz verschwindet.

c) $\displaystyle\frac{1}{z^2-\pi^2} = \frac{1}{(z+\pi)(z-\pi)} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{z-\pi} - \frac{1}{z+\pi}\right)$;
daher ist

$$\int_{\partial D} \frac{dz}{z^2-\pi^2} = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{\partial D} \frac{dz}{z-\pi} - \int_{\partial D} \frac{dz}{z+\pi}\right) = \frac{2\pi i - 0}{2\pi} = i\,,$$

denn der zweite Inegrand ist holomorph in ganz $\overline{D}$.

Alternativ: Die Funktione hat Pole bei $\pm\pi$, wobei nur der bei π in D liegt. Das Residuum dort ist, da es sich um einen Pol erster Ordnung handelt,

$$\operatorname{Res}_\pi \frac{1}{z^2-\pi^2} = \lim_{z\to\pi} \frac{z-\pi}{z^2-\pi^2} = \lim_{z\to\pi} \frac{1}{z+\pi} = \frac{1}{2\pi}\,.$$

Nach dem Residuensatz ist daher

$$\int_{\partial D} \frac{dz}{z^2-\pi^2} = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_\pi \frac{1}{z^2-\pi^2} = i\,.$$

d) Dieser Integrand hat einen Pol der Ordnung 2017 bei π; die LAURENT-Reihe um den Punkt π besteht nur aus dem Summanden $(z-\pi)^{-2017}$. Insbesondere gibt es keinen Term mit $(z-\pi)^{-1}$, d.h. das Residiuum im Punkt π verschwindet, und damit auch das Integral. (Man kann natürlich auch, wie bei *b)*, über die Stammfunktion argumentieren.)

e) Hier liegt der einzige Pol bei $z = \pi^{2017}$, also weit außerhalb von D. In der Umgebung von D ist der Integrand somit holomorph, so daß das Integral nach dem CAUCHYschen Integralsatz verschwindet.

Aufgabe 2: *(9 Punkte)*

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$ *b)* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{20x}{(x^2+4)(x^2-2x+2)}\,dx$ *c)* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+256}\,dx$

Lösung: *a)* $(z^2+1)(z^2+9)$ hat die vier Nullstellen $\pm i$ und $\pm 3i$, von denen keine auf der reellen Achse liegt; außerdem ist der Grad vier des Nenners des Integranden um mindestens zwei größer als der Grad Null des Zählers. Somit ist das Integral gleich $2\pi i$ mal der Summe der Residuen bei i und bei $3i$. Alle Pole haben die Ordnung eins; daher können wir die Residuen über die Grenzwertformel berechnen:

$$\mathrm{Res}_i \frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)} = \lim_{z\to i} \frac{z-i}{(z^2+1)(z^2+9)} = \lim_{z\to i} \frac{1}{(z+i)(z^2+9)} = \frac{1}{2i\cdot 8} = \frac{1}{16i}$$

und

$$\mathrm{Res}_{3i} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)} = \lim_{z\to 3i} \frac{z-3i}{(z^2+1)(z^2+9)} = \lim_{z\to 3i} \frac{1}{(z^2+1)(z+3i)} = \frac{1}{(-8)\cdot 6i} = \frac{-1}{48i}\,.$$

Somit ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)} = 2\pi i\left(\frac{1}{16i} - \frac{1}{48i}\right) = 2\pi\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{48}\right) = \frac{\pi}{12}\,.$$

b) Auch hier ist der Nennergrad vier um mindestens zwei größer als der Zählergrad eins. Wegen

$$z^2 - 2z + 2 = (z-1)^2 + 1$$

liegen die Nullstellen des Nenners bei $\pm 2i$ und $1 \pm i$; das Integral ist also gleich $2\pi i$ mal der Summe der Residuen bei $2i$ und bei $1+i$. Wieder haben alle Pole die Ordnung eins.

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{2i} \frac{20z}{(z^2+4)(z^2-2z+2)} &= \lim_{z\to 2i} \frac{(z-2i)\cdot 20z}{(z^2+4)(z^2-2z+1)} = \lim_{z\to 2i} \frac{20z}{(z+2i)(z^2-2z+2)} \\ &= \frac{40i}{4i\cdot(-4-4i+2)} = \frac{10}{-2-4i} = \frac{10(-2+4i)}{2^2+4^2} = -1+2i\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{1+i} \frac{1}{(z^2+4)(z^2-2z+2)} &= \lim_{z\to 1+i} \frac{(z-1-i)\cdot 20z}{(z^2+4)(z^2-2z+1)} = \lim_{z\to 1+i} \frac{20z}{(z^2+4)(z-1+i)} \\ &= \frac{20(1+i)}{(2i+4)\cdot 2i} = \frac{20(1+i)}{-4+8i} = \frac{20(1+i)(-4-8i)}{4^2+8^2} = \frac{20(4-12i)}{80} = 1-3i\,.\end{aligned}$$

Somit ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2-2x+2)} = 2\pi i\big((-1+2i)+(1-3i)\big) = 2\pi\,.$$

c) $z^4+256=(z^2+16i)(z^2-16i)$. Die Wurzel aus i ist $\pm(1+i)\frac{\sqrt{2}}{2}$, die von $-i$ ist das i-fache davon, also $\pm(-1+i)\frac{\sqrt{2}}{2}$. Die Wurzeln aus $\pm 16i$ sind die Vierfachen davon, also die vier Zahlen

$$z_1=2(1+i)\sqrt{2},\quad z_2=-z_1,\quad z_3=2(-1+i)\sqrt{2}\quad\text{und}\quad z_4=-z_3\,.$$

Dabei ist $z_1^2=z_2^2=16i$ und $z_3^2=z_4^2=-16i$.
Wieder ist der Zählergrad zwei um mindestens zwei kleiner als der Nennergrad vier, und wieder sind alle Polstellen einfach und keine liegt auf der reellen Achse. Positiven Imaginärteil haben z_1 und z_3; auf die Residuen dort kommt es also an.

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{z_1}\frac{z^2}{(z^4+256)}&=\lim_{z\to z_1}\frac{\bigl(z-2(1+i)\sqrt{2}\bigr)z^2}{(z^4+256)}=\lim_{z\to z_1}\frac{z^2}{\bigl(z+2(1+i)\sqrt{2}\bigr)(z^2+16i)}\\&=\frac{16i}{4(1+i)\sqrt{2}\cdot 32i}=\frac{1}{8(1+i)\sqrt{2}}=\frac{(1-i)\sqrt{2}}{8\cdot(1^2+1^2)\cdot 2}=\frac{\sqrt{2}}{32}-\frac{i\sqrt{2}}{32}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{z_3}\frac{z^2}{(z^4+256)}&=\lim_{z\to z_3}\frac{\bigl(z-2(-1+i)\sqrt{2}\bigr)z^2}{(z^4+256)}=\lim_{z\to z_3}\frac{z^2}{(z^2-16i)\bigl(z+2(-1+i)\sqrt{2}\bigr)}\\&=\frac{-16i}{-32i\cdot 4(-1+i)\sqrt{2}}=\frac{1}{8(-1+i)\sqrt{2}}=\frac{(-1-i)\sqrt{2}}{8\cdot(1^2+1^2)\cdot 2}=-\frac{\sqrt{2}}{32}-\frac{i\sqrt{2}}{32}\,.\end{aligned}$$

Somit ist

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+256}=\frac{2\pi i}{32}\sqrt{2}\bigl((1-i)+(-1-i)\bigr)=\frac{4\pi}{32}\sqrt{2}=\frac{\pi\sqrt{2}}{8}\,.$$

Aufgabe 3: *(3 Punkte)*

$f=P/Q$ sei eine rationale Funktion, deren Nenner keine reelle Nullstelle habe, und der Grad des Zählers sei mindestens um zwei kleiner als der des Nenners.

a) Zeigen Sie, daß f höchstens endlich viele Polstellen $z_1,\dots,z_r$ mit negativem Imaginärteil hat!

Lösung: Als rationale Funktion hat f nur endlich viele Polstellen, und von denen haben natürlich auch nur endlich viele einen negativen Imaginärteil.

b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ und der Summe der Residuen von f an den Stellen z_k ?

Lösung: R sei größer als die Beträge aller z_k; dann liegen alle z_k im Halbkreis um Null mit Radius R unterhalb der reellen Achse. Nach dem Residuensatz ist das im Gegenuhrzeigersinn durchlaufene Integral über den Rand des Halbkreises gleich $2\pi i$ mal der Summe der Residuen in den Punkten z_k. Dieses Integral setzt sich zusammen aus $-\int_{-R}^{R} f(z)\,dz$ und dem Integral über den Halbkreisbogen. Da der Nennergrad den Zählergrad um mindestens zwei übersteigt, verschwindet letzteres für $R\to\infty$, also ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=-2\pi i\sum_{k=1}^{r}\operatorname{Res}_{z_k} f\,.$$

Aufgabe 4: *(3 Punkte)*

$f\colon G \to \widehat{\mathbb{C}}$ sei eine meromorphe Funktion auf dem beschränkten Gebiet G, und A sei eine abgeschlossene Teilmenge von G. Zeigen Sie: Dann gibt es zwei holomorphe Funktionen g, h, so daß für alle $z \in A$ gilt $f(z) = g(z)/h(z)$.

Lösung: Da das Gebiet G beschränkt ist und $A \subset G$ abgeschlossen, ist A kompakt. Daher kann f in A höchstens endlich viele Polstellen haben: Andernfalls müßten die einen Häufungspunkt in $A \subset G$ haben, was nach Definition einer meromorphen Funktion ausgeschlossen ist. Die Polstellen von f in A seien $z_1, \dots, z_r$, und der Pol in z_k habe die Ordnung e_k. Dann sind

$$h(z) = (z - z_1)^{e_1} \cdots (z - z_r)^{e_r} \quad \text{und} \quad g(z) = (z - z_1)^{e_1} \cdots (z - z_r)^{e_r} f(z)$$

in allen $z \in A$ holomorph, und $f(z) = g(z)/h(z)$.