Wolfgang K. Seiler — A5, C201
Tel. 2515

24. März 2017

5. Übungsblatt Funktionentheorie I

Aufgabe 1: *(4 Punkte)*

Die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ habe die Eigenschaft, daß $f(z+1) = f(z+i) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

a) Zeigen Sie: f ist eindeutig bestimmt durch seine Werte auf dem Quadrat

$$Q = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 0 \le \mathfrak{Re}\, z \le 1 \text{ und } 0 \le \mathfrak{Im}\, z \le 1 \right\}.$$

b) Ist f holomorph, so ist f konstant.

c) Ist f meromorph, so kann f nicht auf $\widehat{\mathbb{C}}$ fortgesetzt werden.

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß die Abbildung $f\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}};\ z \mapsto 1/\overline{z}$ auf der Riemannschen Zahlensphäre mit Mittelpunkt $(0,0,1)$ und Radius eins gerade die Spiegelung an der Äquatorialebene $z=1$ ist!

b) Welche komplexe Abbildung $\widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ beschreibt die Spiegelung am Mittelpunkt der Kugel?

Aufgabe 3: *(9 Punkte)*

Bestimmen Sie die Teilmengen von $\widehat{\mathbb{C}}$, auf denen die folgenden Funktionen holomorph *bzw.* meromorph sind. (Falls eine Funktion, so wie sie dasteht, in einem Punkt $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ nicht definiert ist, soll mit $f(z_0)$ der Grenzwert $\lim_{z\to z_0} f(z)$ gemeint sein – falls ein solcher Grenzwert existiert.) Berechnen Sie außerdem in allen Punkten, in denen die Funktion meromorph, aber nicht holomorph ist, den Hauptteil und das Residuum!

a) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z^4-1}$

b) $f(z) = e^{-1/z^2}$

c) $f(z) = \sin(z)$

d) $f(z) = \dfrac{\cos(z)-1}{z}$

Aufgabe 4: *(3 Punkte)*

Zeigen Sie, ohne irgendwelche Eigenschaften der Exponentialfunktion zu benutzen, daß eine nicht identisch verschwindende holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die für ein $a \in \mathbb{C}$ der Differentialgleichung $f'(z) = af(z)$ genügt, keine komplexe Nullstelle haben kann!

Abgabe bis zum Freitag, dem 31. März 2017, um 12.00 Uhr