Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515 A5, C201

17. März 2017

4. Übungsblatt Funktionentheorie I

Aufgabe 1: *(10 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß $\frac{\sin z}{z}$ eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion ist!

b) Wo ist $\frac{z}{\sin z}$ holomorph?

c) D sei die Kreisscheibe um Null mit Radius eins. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int_{\partial D} \frac{dz}{2z-1} \qquad \int_{\partial D} \frac{\sin\big(\cos(z)\big)}{z}\,dz \qquad \int_{\partial D} \frac{\cos z}{\sin z}\,dz$$

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

a) $f\colon D \to D$ sei eine holomorphe Abbildung der offenen Kreisscheibe D vom Radius r um z_0 auf sich selbst mit $f(z_0) = z_0$. Dann gilt für alle $z \in D$, daß $|f(z)-z_0| \le |z-z_0|$ ist, und falls für ein $z \neq z_0$ hier ein Gleichheitszeichen auftritt, ist f eine Drehung um z_0, hat also die Form $z \mapsto z_0 + e^{i\varphi}(z-z_0)$. (*Hinweis:* Die Reduktion auf den Fall $z_0 = 0$ ist ziemlich klar; danach können Sie die Abbildung $z \mapsto f(rz)/r$ betrachten und das Schwarzsche Lemma darauf anwenden.)

b) G sei ein Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung, die eine abgeschlossene Kreisscheibe $D \subset G$ surjektiv auf sich selbst abbilde und den Mittelpunkt dieser Kreisscheibe festlasse. Dann ist f auf ganz G eine Drehung.

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Zerlegen Sie das Polynom $X^4 - 1$ in ein Produkt linearer und quadratischer reeller Polynome!

b) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen z mit $z^6 = 1$!

c) Zerlegen Sie das Polynom $X^6 - 1$ in ein Produkt linearer und quadratischer reeller Polynome!

Abgabe bis zum Freitag, dem 24. März 2017, um 12.00 Uhr