Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

10. März 2017

3. Übungsblatt Funktionentheorie I

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*
D sei die Kreisscheibe mit Radius eins um den Nullpunkt, und $\triangle$ sei das Dreieck mit den dritten Einheitswurzeln 1, $\zeta_3 = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$ und $\overline{\zeta_3} = \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$ als Ecken. Weiter sei f eine im Gebiet $G = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 5\}$ holomorphe Funktion. Dann gilt

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = \int_{\partial \Delta} f(z)\,dz\,.$$

(*Hinweis:* Betrachten Sie die drei Dreieckseiten jeweils einzeln, zusammen mit den darüberliegenden Drittelkreisen.)

Aufgabe 2: *(10 Punkte)*
$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le 5\}$ sei die Kreisscheibe mit Radius fünf um den Nullpunkt. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_{\partial D} z^n\,dz$ für beliebige *ganze* Zahlen n, *b)* $\int_{\partial D} e^{z^2 \cos z}\,dz$, *c)* $\int_{\partial D} \frac{e^z}{z-2}\,dz$,

d) $\int_{\partial D} \frac{z^3}{z^2-10z}\,dz$, *e)* $\int_{\partial D} \frac{\sin z}{z}\,dz$

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^n\,|x|$ ist n-mal differenzierbar, aber nicht $n+1$ mal.

b) Ist die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^n\,|z|$ stetig? Ist sie komplex differenzierbar?

c) Zeigen Sie: Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^{-1/x^2}$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$ ist beliebig oft differenzierbar. Wohin konvergiert ihre Taylor-Reihe um den Punkt Null?

d) Ist die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = e^{-1/z^2}$ für $z \neq 0$ und $f(0) = 0$ stetig? Ist sie komplex differenzierbar?

Abgabe bis zum Freitag, dem 17. März 2017, um 12.00 Uhr