Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

3. März 2017

2. Übungsblatt Funktionentheorie I

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen irgendwo komplex differenzierbar sind, und geben Sie gegebenenfalls die größtmögliche Teilmenge von $\mathbb{C}$ an, auf der dies der Fall ist:

a) $f(z) = e^{z^{z^2}}$ *b)* $f(z) = \Im\mathfrak{m}\, z$ *c)* $f(z) = \Im\mathfrak{m}\, z - i\,\Re\mathfrak{e}\, z$

d) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ *e)* $f(z) = \dfrac{z - z_0}{1 - z\overline{z_0}}$ mit einem festen $z_0 \neq 0$

Begründen Sie ihre Aussagen!

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*

a) Eine Funktion $u\colon U \to \mathbb{R}$ auf einer Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$ heißt harmonisch, wenn sie mindestens zweimal differenzierbar ist und

$$\Delta u \underset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

identisch verschwindet. Zeigen Sie, daß der Realteil und der Imaginärteil einer mindestens zweimal komplex differenzierbaren Funktion harmonisch sind!

b) $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei auf ganz $\mathbb{R}^2$ harmonisch, und für zwei beliebige reelle Zahlen a, b sei

$$v(x,y) = \int_b^y u_x(x,t)\,dt - \int_a^x u_y(t,b)\,dt\,.$$

Zeigen Sie, daß $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist!

c) $G \subset \mathbb{C}$ sei ein Gebiet. Zeigen Sie, daß jede komplex differenzierbare Funktion $f\colon G \to \mathbb{R}$ konstant ist!

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

Die Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ sei auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ stetig und für jeden geschlossenen Integrationsweg γ mit $|\gamma| \subset G$ sei $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$. Zeigen Sie, daß f dann eine Stammfunktion hat. (*Hinweis:* Zeigen Sie, daß für ein festgehaltenes $z_0 \in G$ und einen in z_0 beginnenden Integrationsweg γ das Integral $\int_\gamma f(z)\,dz$ nur vom Endpunkt z von γ abhängt, und setzen Sie $F(z)$ gleich diesem Wert. Beachten Sie aber, daß G nicht konvex sein muß!)

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*

$\gamma\colon [0,\,1] \to \mathbb{C}$ sei definiert durch $\gamma(t) = 2t + it^2$.

Berechnen Sie die Integrale

a) $\displaystyle\int_\gamma z^2\,dz$ *b)* $\displaystyle\int_\gamma e^{iz}\,dz$ *c)* $\displaystyle\int_\gamma (\Re\mathfrak{e}\, z + i)\,dz$

d) $\displaystyle\int_\gamma \frac{3-2z}{z^5}\,dz$ *e)* $\displaystyle\int_\gamma |z|^2\,dz$

Abgabe bis zum Freitag, dem 10. März 2017, um 12.00 Uhr